آزمون غیرحضوری

دروس اختصاصی دوازدهم ریاضی

(۱۹ مهر ۱۳۹۸)

(مباحث ۳ آبان ۹۸)

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیرحضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	**مدیر گروه:** فاطمه رسولی‌نسب **مسئول دفترچه:** آتنه اسفندیاری
حروف‌نگار و صفحه‌آرا	حسن خرّم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی « وقف عام»

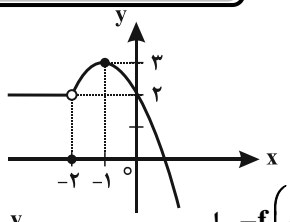
دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

حسابان ۲

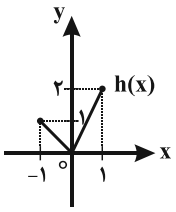
حسابان ۲
تابع
صفحه‌های ۱ تا ۱۸

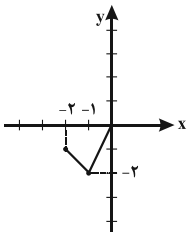
۱- اگر نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=\begin{cases} a+c & ; x<-۲ \\ bx^۲-cx+۲b & ; x=-۲ \\ -(x-a)^۲+۳ & ; x>-۲ \end{cases}$ باشد، b کدام است؟

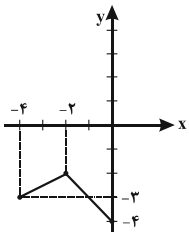


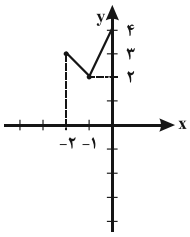
۱) ۳-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۳

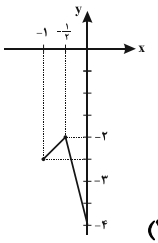
۲- نمودار تابع $h(x)=f(x-۱)-۲$ مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع $-f\left(\frac{x}{۲}\right)$ را به‌درستی نشان می‌دهد؟



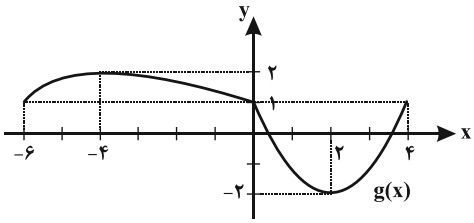
۱)


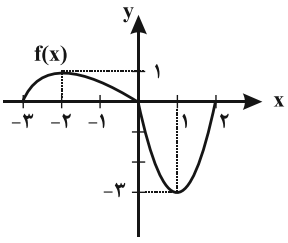
۲)


۳)


۴)


۳- با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟



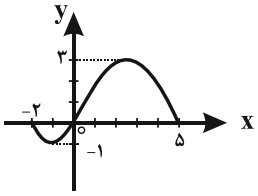


۱) $g(x)=f\left(\frac{x+۲}{۲}\right)$
۲) $g(x)=f(۲x)+۱$
۳) $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$
۴) $g(x)=f(x+۲)+۲$

۴- نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۲$ را در راستای محورهای مختصات دو واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل کرده‌ایم تا نمودار تابع $g(x)$ به‌دست آید. عرض نقطهٔ تلاقی دو نمودار f و g کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۵- اگر نمودار تابع $f(x+۲)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ عبارت $\sqrt{xf\left(۱-\frac{x}{۲}\right)}$ به کدام صورت است؟

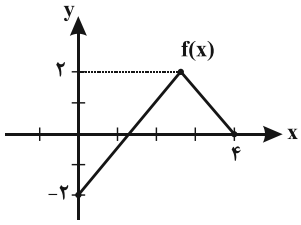


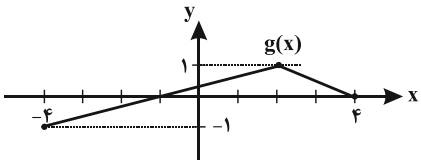
۱) $\{-۱۲,۲\}\cup[-۲,۰]$
۲) $[-۱۲,-۲]\cup[۰,۲]$
۳) $\{-۱۲\}\cup[-۲,۲]$
۴) $[-۶,-۱]\cup[۰,۱]$

۶- اگر دامنهٔ تعریف تابع $y=f(۲-x)$ بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $f(۳x+۴)$ کدام است؟

۱) $\left[-\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right]$
۲) $[۰,۱]$
۳) $[۰,۳]$
۴) $[۱,۲]$

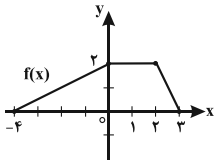
۷- با توجه به نمودارهای داده شده، اگر دامنه و برد دو تابع $y_1=\frac{1}{2}f(x+a)+1$ و $y_2=g(2x)+b$، دوبه‌دو با هم برابر باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

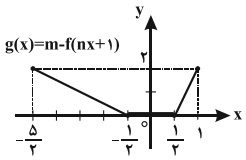




۱) ۲
۲) ۳
۳) -۲
۴) -۳

۸- با توجه به نمودارهای $f(x)$ و $g(x)=m-f(nx+1)$، حاصل $2m+n$ کدام است؟





۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۳

۹- اگر دامنهٔ تابع $y_1=f(x)$ بازهٔ $[1,4)$ و دامنهٔ تابع $y_2=g(x)$ بازهٔ $(2,9)$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x)=2f(x^2)-g(3-2x)$ کدام بازه است؟

۱) $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ ۲) $[1,2)$ ۳) $(-2,-1]$ ۴) $\varnothing$

۱۰- مساحت محصور بین محورهای مختصات و خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی به معادله $y=(x+1)^3$ با آن‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱- تابع $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند. اگر حاصل‌ضرب طول این نقاط ۳+ و $f(2)=15$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۱

۱۲- کدام تابع در دامنهٔ خود، اکیداً صعودی است؟

۱) $f(x)=2^{-x}$ ۲) $g(x)=|x+2|$ ۳) $h(x)=\sqrt{2-x}$ ۴) $k(x)=\log_2^x$

۱۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; x\geq -1\\ 2 & ; x<-1\end{cases}$، اگر برای هر دو مقدار a و b در بازهٔ $(-1,0)$ داشته باشیم: $a<b$، آن‌گاه کدام مورد همواره صحیح است؟

۱) $f(a)<f(b)$ ۲) $f(a^2)>f(b^2)$
۳) $|f(a)-f(b)|<|a-b|$ ۴) $f(a)+f(b)>|a|+|b|$

۱۴- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\log_{0/1}^{(x+1)}<\log_{0/1}^{(2x-3)}$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ ۲) $(-1,+\infty)$
۳) $\left(\frac{3}{2},4\right)$ ۴) $(-\infty,4)$

۱۵- در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases} 2(x+3)^3 & ; \ x<-3 \\ -x^2-3x & ; \ -3\le x<0 \\ \sqrt{x} & ; \ x\ge 0 \end{cases}$، به‌ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

۱) $(-1,+\infty)$ و $(-2,-1)$
۲) $(-3,-2)$ و $[-1,1]$
۳) $[-4,-2]$ و $[-1,0]$
۴) $[-2,-1]$ و $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$

۱۶- کدام‌یک از توابع زیر در طول دامنهٔ تعریف خود نزولی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $y=x+|x|$
۲) $y=x-[x]$
۳) $y=|x|+|x-1|$
۴) $y=x\left(\frac{1}{[x]+[-x]}\right)$

۱۷- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x^2+4x-5$ با دامنهٔ $\left|x+\frac{7}{2}\right|<\frac{3}{2}$ درست است؟

۱) مثبت است.
۲) نزولی است.
۳) صعودی است.
۴) غیریکنوا است.

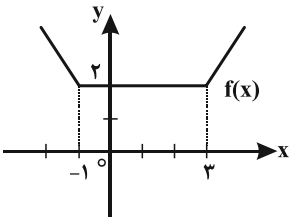
۱۸- اگر f در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{f(|x|)-f(2)}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$
۲) $[-2,2]$
۳) $(-\infty,0]$
۴) $[-3,2]$

۱۹- به ازای چه مقداری از a، تابع $f(x)=\begin{cases} |x+1| & ; \ x\le -1 \\ -\frac{x}{2}+a & ; -1<x<1 \\ -\sqrt{x-1}-1 & ; \ x\ge 1 \end{cases}$ اکیداً نزولی خواهد بود؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) -1
۴) $-\frac{3}{2}$

۲۰- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=f(2+|x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟



۱) $[-2,+\infty)$
۲) $[1,+\infty)$
۳) $[-1,+\infty)$
۴) $[-3,+\infty)$

حسابان ۱
تابع
صفحه‌های ۳۷ تا ۷۰

ریاضیات پایه

۲۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف) تابع $f(x)=\frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x)=\frac{5}{2}$ است.

ب) اگر $g(4)=7$ و $f(7)=5$ باشد، $(fog)(4)=35$.

پ) توابع $f(x)=x|x|$ و $g(x)=x^2$ مساوی هستند.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

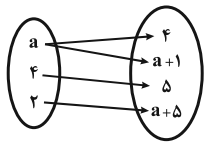
۲۲- معادلهٔ $[x^2]=1+\frac{3}{2}|x|$ چند جواب دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۲۳- چند تابع از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{m,n,p,q\}$ می‌توان نوشت به‌طوری که تعداد اعضای دامنه و برد آن برابر باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

۲۴- نمودار ون تابع f به‌صورت زیر و تابع g به صورت $g=\{(x,2x-1)\mid x\in R_f\}$ است. مقدار $f+g$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۹

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۵- چه تعداد از توابع زیر وارون‌پذیر نیستند؟

$f(x)=3x+\sqrt{x}$ ، $h(x)=\sqrt{x}-3x$ ، $k(x)=x+\frac{1}{|x|}$ ، $g(x)=x^2+|x|+100$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶- در تابع خطی f رابطهٔ $4f(2x)=f(8x-1)-5$ برقرار است. اگر $f^{-1}(3)=5$ باشد، مقدار m از تساوی $f^{-1}(m)=2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷- ضابطهٔ وارون تابع $y=2x+|x|$ کدام است؟

۱) $y=-\frac{2x+|x|}{3}$ ۲) $y=-\frac{2x-|x|}{3}$ ۳) $y=\frac{2x+|x|}{3}$ ۴) $y=\frac{2x-|x|}{3}$

۲۸- به‌ازای چند مقدار m، تابع $f=\{(1,m^3-m),(m,4),(1,4m^2-4),(5,m+1),(0,m^2+2)\}$ وارون‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹- اگر $f=\{(2,3),(a,4),(12,1)\}$ ، $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و $fog=\{(1,3),(4,4),(b,1)\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱۵

۳۰- تابع $f(x)$ دارای این ویژگی است که $f(x)=\frac{f(x+1)+f(x-1)}{2}$. اگر $f(-1)=-3$ و $f(2)=-1$ باشد، $f(5)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

هندسه ۳

هندسه ۳
ماتریس و کاربردها
صفحه‌های ۹ تا ۲۳

۳۱- اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 8 & -5\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 13 & \frac{21}{2}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -18 & -26\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}11 & -3\\ -7 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-19 & 8\\ 22 & -6\end{bmatrix}$

۳۲- ماتریس‌های $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۳}$ با درایه‌های $A_{ij}=\begin{cases} i^۲-j \ ; \ i>j \\ i+j \ ; \ i=j \\ j^۲-i \ ; \ i<j \end{cases}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۲}$ با درایه‌های $b_{ij}=ij$ مفروض‌اند. حاصل $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}$ چقدر است؟

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^۲+AB+۳B$ کدام است؟

۱) $۳I$ ۲) $۶I$ ۳) $۹I$ ۴) $۱۲I$

۳۴- اگر $A^۲=\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$ باشد و $A^۲=۲A+۱۳I$، آنگاه ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}+A^{۱۳}$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۳۶- اگر ماتریس A به‌صورت $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، $A+A^۲+A^۴+A^۶$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۳۷- اگر ماتریس A وارون‌پذیر و $A^{-۱}=A$ باشد، ماتریس $\left(A+A^{-۱}\right)^۲$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۲I$ ۳) $۳I$ ۴) $۴I$

۳۸- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^۶=\bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $I-A$ کدام است؟

۱) $I+A+A^۲-A^۳-A^۴-A^۵$ ۲) $I-A+A^۲+A^۳-A^۴-A^۵$

۳) $I+A+A^۲+A^۳+A^۴+A^۵$ ۴) $I-A-A^۲-A^۳-A^۴-A^۵$

۳۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $\left(P^{-۱}AP\right)^۲$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۳۶ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳۶ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

۴۰- اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر λ، ماتریس $I-\lambda A$ وارون‌پذیر است؟

۱) $\{۱\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

ریاضیات گسسته
آشنایی با نظریهٔ اعداد
صفحه‌های ۱ تا ۱۷

ریاضیات گسسته

۴۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر، یک قضیهٔ دوشرطی است؟ $(a,k \in \mathbb{R})$

۱) اگر $a+\frac{1}{a} \geq 2$ باشد، آنگاه $a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$ است.

۲) اگر $a > 0$ باشد، آنگاه $a \neq -1$ است.

۳) اگر α و β دو عدد گنگ باشند، آنگاه $\alpha-\beta$ گویاست.

۴) اگر $k^3 > k^2$ باشد، آنگاه $k > 1$ است.

۴۲- درستی کدام یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

۱) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۲) اگر n عددی طبیعی و n^2 مضرب ۸ باشد، آنگاه n مضرب ۴ است.

۳) به ازای هیچ دو عدد اول p و q، عدد $p+q$ اول نیست.

۴) عدد ۸ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۴۳- اگر $a^2 \mid a+b$، آنگاه کدام رابطهٔ زیر لزوماً صحیح نیست؟

۱) $a^2 \mid b^2$ ۲) $a \mid 3b-2a$ ۳) $a^2 \mid a-b$ ۴) $a^2 \mid a^2+b^2$

۴۴- روی منحنی $y=\frac{4x-1}{x+3}$، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۵- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، آنگاه کدام گزارهٔ شرطی زیر لزوماً صحیح نیست؟

۱) اگر p اول باشد و $p \nmid a$، آنگاه $[a,p]=ap$.

۲) اگر $a \nmid b$، آنگاه $(a,b)=1$.

۳) اگر $(a,b)=(a,c)=1$، آنگاه $(a,bc)=1$.

۴) اگر a و b دو عدد فرد متوالی باشند، آنگاه $(a,b)=1$.

۴۶- در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت و باقی‌مانده به‌ترتیب برابر q و r هستند. کدام رابطهٔ زیر همواره درست است؟

۱) $(a,r)=(b,r)$ ۲) $(a,b)=(b,r)$ ۳) $(a,q)=(b,q)$ ۴) $(a,b)=(a,r)$

۴۷- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم x و y بر ۲۷، به‌ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2x-3y$ بر ۲۷ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵- ۴) ۱۷

۴۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۳، باقی‌مانده ۷ برابر خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۴۹- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a+100$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به‌ترتیب برابر ۱۰ و ۱۱ باشند، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) ۶۶ ۴) ۹۹

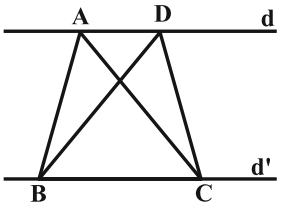
۵۰- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم k^2+1 بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

هندسه ۱

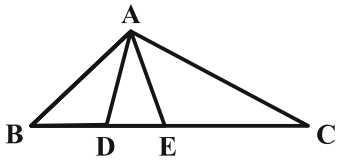
هندسه ۱
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن
صفحه‌های ۲۹ تا ۳۷

۵۱- در شکل زیر $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، ۸ واحد مربع است. اگر $BD = ۴$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD کدام است؟



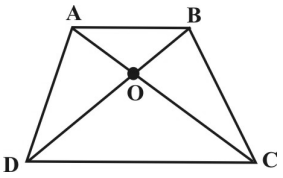
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۵۲- در شکل زیر، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت $\frac{BC}{DE}$ کدام است؟



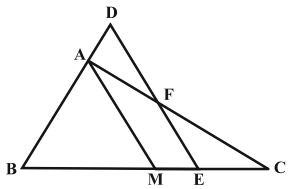
۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

۵۳- در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های AOB و DOC به ترتیب برابر ۴ و ۹ واحد مربع است. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۵
۳) ۲۷
۴) ۳۰

۵۴- در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانهٔ ضلع BC و $DE \parallel AM$ است. اگر DE ضلع AC را در F قطع کند به طوری که $\frac{EF}{AM} = \frac{۳}{۵}$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{DE}{AM}$ کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۱/۴
۳) ۱/۶
۴) ۱/۲

۵۵- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول ساق ۳ و قاعده‌های ۶ و ۹، از محل تلاقی قطرها خطی به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را قطع کند. اندازهٔ قطعه کوچک‌تر ایجاد شده روی ساق چقدر است؟

۱) ۰/۶
۲) ۱/۸
۳) ۱
۴) ۱/۲

آمار و احتمال

آمار و احتمال
آشنایی با مبانی ریاضیات
صفحه‌های ۱۹ تا ۲۵

۵۶- مجموعهٔ $A = \{\{a\},\{b\},\{b,a\},\{b,a,a\},\{a,b\},b\}$ چند زیرمجموعهٔ ناتهی شامل عضو $\{a\}$ دارد؟

۱) ۱
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۳۲

۵۷- اگر $A = \{۱,\{۲\},\{۱,۲\},\varnothing\}$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) $\{۱,۲\} \in A$
۲) $\{۱\} \subseteq A$
۳) $\{۱,۲\} \subseteq A$
۴) $\varnothing \subseteq A$

۵۸- دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{m, m^۲ + m, -m^۲ + ۲m\}$ مساوی یکدیگرند. m چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۵۹- اگر $A = \{۱,۲,\{۱\},\{۱,\{۱\}\},\{۱,۲,\{۱\}\}\}$، آنگاه مجموعهٔ $B = \{x \in A \mid x \subseteq A\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۶۰- فرض کنید A، B و C زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳\}$ باشند، به‌گونه‌ای که $A\subseteq B$، $B\subseteq C$، $۱\notin A$، $۲\notin B$ و $۳\notin C$. کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $A=\{۳\}$ ۲) $B=\{۱\}$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $C=\{۱,۲\}$

۶۱- مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن ۹ باشد؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۲۵ ۴) ۱۶

۶۲- چند افراز متمایز از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ وجود دارد که شامل یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۶۳- مجموعه‌های $A=\{۶k\pm۱\,|\,k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{۳k\pm۱\,|\,k\in A\}$ مفروض‌اند. چند مجموعه مانند C وجود دارد به‌گونه‌ای که گزارهٔ « $\exists C;\forall x\in C;x\in A\wedge x\in B$ » درست باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۶۴- از مجموعهٔ $U=\{۱,۲,۳,۴\}$، به چند طریق می‌توان دو زیرمجموعه مانند A و B را انتخاب کرد، به‌طوری‌که $A\cap B=\varnothing$ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۵۴ ۳) ۸۱ ۴) ۶۴

۶۵- یک مجموعهٔ ۶ عضوی را به چند طریق می‌توان به حداقل ۲ زیرمجموعه افراز کرد به گونه‌ای که در هر افراز، تعداد اعضای زیرمجموعه‌ها یکسان باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

فیزیک ۳

فیزیک ۳
حرکت بر خط راست
صفحه‌های ۱ تا ۲۱

۶۶- شخصی از مکان ۱ به مکان ۲ می‌رود. کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

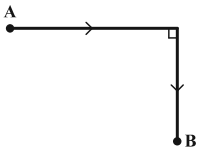
۱) اگر محل مکان ۱ و مسافت طی شده توسط شخص را داشته باشیم، می‌توان محل مکان ۲ را به‌دست آورد.

۲) اگر محل مکان ۱ و ۲ را داشته باشیم، می‌توان مسافت طی شده توسط شخص را به‌دست آورد.

۳) اگر بردار جابه‌جایی و مسافت طی شده را داشته باشیم، می‌توان محل مکان‌های ۱ و ۲ را به‌دست آورد.

۴) اگر محل مکان ۲ و بردار جابه‌جایی را داشته باشیم، می‌توان محل مکان ۱ را به‌دست آورد.

۶۷- مطابق شکل زیر، متحرکی در مسیر مشخص شده از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. حداکثر نسبت مسافت طی شده توسط متحرک به جابه‌جایی آن، کدام است؟



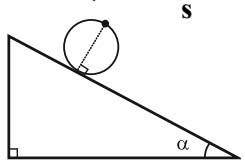
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲ ۴) برای این نسبت، حداکثری وجود ندارد.

۶۸- تندی متوسط یک اتومبیل در شهر تهران پس از طی مسافت $۴۵۵km$ برابر با $۳۵\frac{km}{h}$ است. اگر این اتومبیل بدون توقف این مسافت را طی کرده باشد، تندی متوسط آن در نیمهٔ اول زمانی طی این مسیر، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۵ ۲) $\frac{۱۷۵}{۱۸}$ ۳) ۱۲۶ ۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۶۹- مطابق شکل زیر، تکه سنگی به نقطهٔ مشخص شده از چرخی به شعاع r چسبیده است. این چرخ در مدت ۰/۵ ثانیه به‌اندازهٔ نیم دور از بالای سطح شیبدار به سمت پایین می‌چرخد. اگر در این حرکت، اندازهٔ سرعت متوسط سنگ $۴\sqrt{۱۳}\frac{m}{s}$ باشد، شعاع r چند متر است؟ $(\pi=۳)$



۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۳

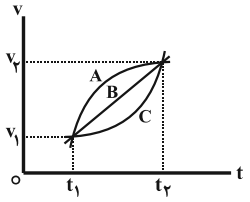
۷۰- یک پهپاد کوچک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از مدت ۴ ثانیه حرکت در راستای قائم، اندازهٔ سرعت متوسط آن $۵\frac{m}{s}$ می‌شود. اگر نور خورشید با زاویهٔ ۵۳° نسبت به سطح افقی زمین به آن بتابد، طی این مدت اندازهٔ سرعت متوسط سایهٔ پهپاد روی سطح افقی زمین چند متر بر ثانیه بوده است؟ $\left(\tan ۵۳^\circ = \frac{۴}{۳}\right)$

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۳/۷۵ ۴) $\frac{۸۰}{۳}$

۷۱- متحرکی که با سرعت ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند در لحظهٔ $t_۱ = ۳s$ در مکان $x_۱ = ۵m$ و در لحظهٔ $t_۲ = ۸s$ در مکان $x_۲ = -۱۴m$ است. اندازهٔ جابه‌جایی این متحرک در ۵ ثانیهٔ هفتم حرکت چند متر است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹

۷۲- نمودار سرعت – زمان سه متحرک A، B و C که در مسیری مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در کدام گزینه مقایسهٔ درستی بین سرعت متوسط و شتاب متوسط این سه متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ انجام شده است؟



۱) $(a_{av})_A = (a_{av})_B = (a_{av})_C$ ، $(v_{av})_A = (v_{av})_B = (v_{av})_C$

۲) $(a_{av})_A > (a_{av})_B > (a_{av})_C$ ، $(v_{av})_A > (v_{av})_B > (v_{av})_C$

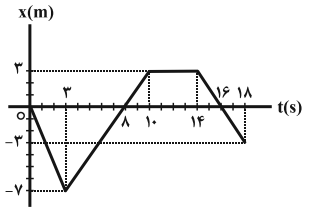
۳) $(a_{av})_A = (a_{av})_B = (a_{av})_C$ ، $(v_{av})_A > (v_{av})_B > (v_{av})_C$

۴) $(a_{av})_A < (a_{av})_B < (a_{av})_C$ ، $(v_{av})_A < (v_{av})_B < (v_{av})_C$

۷۳- طول عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعتی ۵cm است. اندازهٔ سرعت متوسط نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار این ساعت در بازهٔ زمانی $۳:۱۵'$ تا $۳:۴۵'$ چند متر بر ساعت است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۰/۲

۷۴- شکل زیر نمودار مکان – زمان متحرکی را نشان می‌دهد. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک از شروع حرکت تا لحظهٔ $t = ۱۸s$ درست است؟



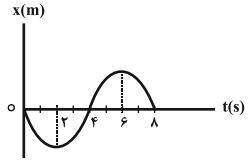
۱) در لحظه‌های ۸s و ۱۶s تغییر جهت داده است.

۲) در مجموع به مدت ۷ ثانیه در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است.

۳) در مجموع به مدت ۶ ثانیه سرعت آن صفر بوده است.

۴) در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۶ ثانیه، تندی متوسط آن صفر است.

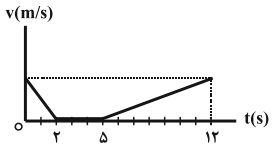
۷۵- در شکل زیر، نمودار مکان – زمان حرکت متحرکی نشان داده شده است. در کدام بازهٔ زمانی مشخص شده، سرعت منفی و حرکت شتاب‌دار کندشونده است؟



۱) صفر تا ۲s ۲) ۲s تا ۴s

۳) ۴s تا ۶s ۴) ۶s تا ۸s

۷۶- متحرکی در راستای خط راست در حال حرکت است و نمودار سرعت – زمان آن به‌صورت زیر است. اگر بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ حرکت تا لحظهٔ $t = ۱۲s$ برابر با ۶۳m باشد، مسافت طی شده توسط آن در مرحلهٔ تندشونده چند متر خواهد بود؟



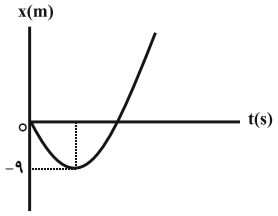
۱) ۴۹ ۲) ۵۳

۳) ۱۷ ۴) ۳۶

۷۷- متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست در مدت $4s$ و بدون تغییر جهت، مسافت $28m$ را طی می‌کند. اگر سرعت جسم در پایان این مدت $11\frac{m}{s}$ باشد، شتاب حرکت جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۷۸- نمودار مکان – زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x ها حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت جسم در مکان $x = 27m$ برابر با $12\frac{m}{s}$ باشد، سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟

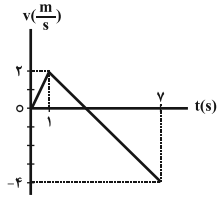


۱) ۳ ۲) -۳
۳) -۶ ۴) ۶

۷۹- معادلهٔ مکان – زمان جسمی که در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = -t^2 + 4t - 4$ است. مسافت طی شده توسط این جسم در بازهٔ زمانی صفر تا $4s$ برابر با چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۸۰- نمودار سرعت – زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. از لحظهٔ $t = 0$ تا $t = 7s$، چند ثانیه حرکت متحرک کندشونده است؟

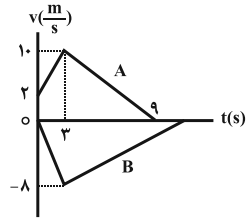


۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

۸۱- جسمی با شتاب ثابت بر محور x و در سوی مثبت آن در حرکت است. این جسم در لحظهٔ $t = 0$ در مکان $x_0 = 12m$ قرار دارد و سرعتش $5\frac{m}{s}$ است. اگر در مکان $x = 16m$ سرعت جسم $3\frac{m}{s}$ باشد، معادلهٔ مکان – زمان آن در SI کدام است؟

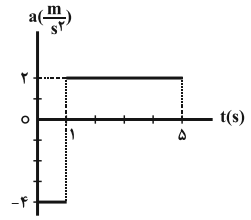
۱) $x = t^2 - 5t + 12$ ۲) $x = -t^2 + 5t + 12$ ۳) $x = t^2 + 5t - 12$ ۴) $x = -t^2 - 5t - 12$

۸۲- در شکل زیر، نمودار سرعت – زمان دو متحرک A و B که از مبدأ مکان روی محور x و در دو سوی مخالف حرکت نموده‌اند رسم شده است. اگر جابه‌جایی دو متحرک یکسان باشد، چند ثانیه پس از توقف متحرک A، متحرک B متوقف می‌شود؟



۱) ۱۲
۲) ۳
۳) ۷
۴) ۶

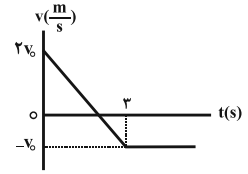
۸۳- نمودار شتاب – زمان متحرکی که در مبدأ زمان از مبدأ مکان با سرعت $6\frac{m}{s}$ روی محور x می‌گذرد، مطابق شکل زیر است.



کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک صحیح نیست؟

۱) حرکت متحرک همواره در جهت محور x است.
۲) حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.
۳) متحرک جهت حرکتش را یکبار عوض کرده است.
۴) جابجایی متحرک در کل حرکت ۲۸ متر است.

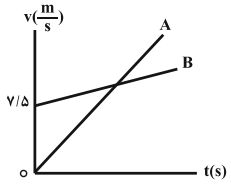
۸۴- نمودار سرعت – زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t=0$ متحرک در مبدأ مکان باشد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه متحرک دوباره از مبدأ مکان عبور می‌کند؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۴/۵ ۴) ۵

۸۵- نمودار سرعت – زمان دو متحرک A و B که در مبدأ زمان روی مسیری مستقیم از یک نقطه عبور می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر $a_A = 3\frac{m}{s^2}$ و $a_B = 1/5\frac{m}{s^2}$ باشد، به‌ترتیب از راست به چپ، چند ثانیه پس از شروع حرکت سرعت دو متحرک برابر می‌شود و چند ثانیه پس از شروع حرکت دو متحرک به هم می‌رسند؟



۱) ۷/۵ ، ۱۵ ۲) ۵ ، ۱۰

۳) ۵ ، ۱۵ ۴) ۷/۵ ، ۱۰

فیزیک ۱

فیزیک ۱
ویژگی‌های فیزیکی مواد
صفحه‌های ۵۹ تا ۹۰

۸۶- کدام گزینه دربارهٔ شیشه نادرست است؟

۱) ذرات شیشه به‌سبب نیروهای الکتریکی‌ای که به یکدیگر وارد می‌کنند، در کنار یکدیگر می‌مانند.

۲) شیشه از سردسازی سریع حالت مایع آن به وجود آمده است.

۳) ذرات سازندهٔ شیشه در مکان‌های معینی نسبت به یکدیگر قرار دارند و در این مکان‌ها حرکت انتقالی انجام می‌دهند.

۴) اگر مولکول‌های شیشه را نسبت به وضعیت تعادل، به هم نزدیک‌تر یا از هم دورتر کنیم، نیرویی بین آنها ایجاد شده و آن‌ها را به وضع تعادل باز می‌گرداند.

۸۷- زمانی‌که لوله‌ای مویین را به‌طور عمود در ظرف جیوه قرار می‌دهیم، به‌علت بزرگی نیروی ..... بین مولکول‌های جیوه نسبت به نیروی ..... بین مولکول‌های جیوه و شیشه، سطح جیوه در لولهٔ مویین ..... از سطح جیوه درون ظرف قرار می‌گیرد.

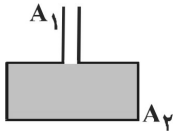
۱) هم‌چسبی، دگرچسبی، پایین‌تر ۲) هم‌چسبی، دگرچسبی، بالاتر

۳) دگرچسبی، هم‌چسبی، پایین‌تر ۴) دگرچسبی، هم‌چسبی، بالاتر

۸۸- ابعاد استوانهٔ B، دو برابر ابعاد استوانهٔ A است. مقداری آب درون استوانهٔ A می‌ریزیم و هم حجم با آب، در استوانهٔ B، الکل می‌ریزیم. فشار وارد بر کف ظرف A از طرف مایع چند برابر فشار وارد بر کف ظرف B از طرف مایع است؟ ($\rho_{\text{الکل}} = 0/8\rho_{\text{آب}}$)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۲ ۴) ۵

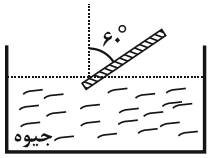
۸۹- در شکل زیر، سطح قاعدهٔ ظرف، A_2 و سطح مقطع قسمت باریک آن A_1 می باشد. اگر $A_2 = 10A_1$ باشد و مایعی به وزن ۲۰N درون لولهٔ باریک روی مایع اولیه بریزیم، اندازهٔ نیروی وارد بر کف ظرف چند نیوتون افزایش می‌یابد؟



۱) ۲ ۲) ۲۰

۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰۰۰

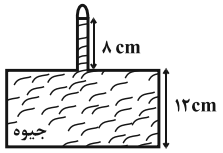
۹۰- در شکل زیر، طول قسمتی از لوله که بیرون از جیوه قرار دارد ۰/۵ متر است. اگر زاویهٔ لوله با راستای قائم را ۷ درجه کاهش دهیم، اندازهٔ نیرویی که از طرف جیوه بر انتهای بستهٔ لوله وارد می‌شود، چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10\frac{N}{kg}$، فشار هوا در محل ۷۵cmHg، چگالی جیوه ۱۳/۶ گرم بر سانتی‌متر مکعب، سطح مقطع انتهای لوله $10cm^2$ و $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6$ است.)



۱) ۶/۸N کاهش می‌یابد. ۲) ۶/۸N افزایش می‌یابد.

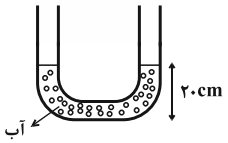
۳) ۲۷/۲N کاهش می‌یابد. ۴) ۲۷/۲N افزایش می‌یابد.

۹۱- در شکل زیر، جیوه در حال تعادل، مساحت قاعدهٔ ظرف $100cm^2$ و اندازهٔ نیرویی که به کف ظرف وارد می‌شود برابر با $340N$ است. فشار گاز محبوس در بالای ظرف چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{g}{cm^3}$ و $g = 10 \frac{N}{kg}$)



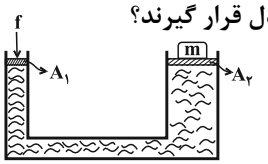
۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۲- در یک لولهٔ U شکل آب می‌ریزیم تا سطح آب $20cm$ بالاتر از ته لوله قرار گیرد. سپس در شاخهٔ سمت راست روغن به چگالی $0/8 \frac{g}{cm^3}$ می‌ریزیم. سطح آب در شاخهٔ سمت چپ تا ارتفاع $25cm$ بالا می‌رود. در این حالت سطح فصل مشترک روغن و هوا در شاخه سمت راست در ارتفاع چند سانتی‌متری از ته لوله قرار دارد؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3}$ و سطح مقطع لوله در دو طرف یکسان است.)



۱) ۲۷/۵ ۲) ۱۲/۵
۳) ۳۱/۲۵ ۴) ۲۱/۲۵

۹۳- در شکل زیر، پیستون‌ها سبک بوده و در یک تراز افقی قرار دارند. اگر اندازهٔ نیروی f ده درصد افزایش یابد، وزنه چند کیلوگرمی بر روی وزنهٔ $m = 20kg$ باید قرار دهیم تا پیستون‌ها باز هم در یک تراز افقی درحال تعادل قرار گیرند؟



۱) ۲۱ ۲) ۱
۳) ۲۲ ۴) ۲

۹۴- جسمی را به نیروسنجی آویزان می‌کنیم و بعد از ایجاد تعادل، نیروسنج عدد $22/128N$ را نشان می‌دهد. اگر جسم را به‌طور کامل در مایعی غوطه‌ور کنیم، نیروسنج عدد $21/872N$ را نشان می‌دهد. اگر حجم مایع جابه‌جا شده، برابر با $32cm^3$ باشد، چگالی مایع چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ $\left(g = 10 \frac{N}{kg}\right)$

۱) ۸۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

۹۵- مخزنی استوانه‌ای به ارتفاع $4m$ و قطر قاعدهٔ $1/5m$ به‌طور کامل از آب پُر شده است. اگر فرض کنیم آب با تندی ثابت $50 \frac{cm}{s}$ از سوراخی به مساحت $45cm^2$ در انتهای این مخزن خارج شود، چند دقیقه طول می‌کشد تا این مخزن به‌طور کامل خالی شود؟ $(\pi = 3)$

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۰۰۰ ۳) ۵۰ ۴) ۵

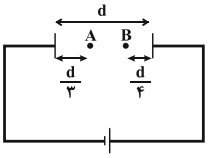
فیزیک ۲

فیزیک ۲
الکتریسیتهٔ ساکن
جریان الکتریکی
صفحه‌های ۳۲ تا ۶۱

۹۶- فاصلهٔ بین دو صفحهٔ خازن مسطحی را که به اختلاف پتانسیل ثابت $20V$ متصل است، دو برابر می‌کنیم. اگر با این عمل $3\mu C$ از بار الکتریکی ذخیره شده در خازن کاسته شود، ظرفیت اولیهٔ خازن چند میکروفاراد بوده است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳

۹۷- ظرفیت خازن تخت شکل زیر $4\mu F$ و بار الکتریکی ذخیره شده در آن $96\mu C$ است. اگر فاصلهٔ بین دو صفحهٔ خازن d باشد، اندازهٔ اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B داخل این خازن چند ولت است؟



۱) ۲۴ ۲) ۱۰
۳) ۱۲ ۴) ۶

۹۸- فضای بین صفحه‌های یک خازن تخت از هوا پُر شده است. اگر چگالی سطحی بار الکتریکی صفحه‌های خازن $9\times10^{-6}\frac{C}{m^2}$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات این خازن چند $\frac{N}{C}$ می‌باشد؟ $\left(\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\frac{F}{m}\right)$

۱) 8×10^{10} ۲) 10^6 ۳) 10^4 ۴) 8×10^3

۹۹- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک خازن را $7/5V$ افزایش دهیم، بار الکتریکی ذخیره شده در آن $30\mu C$ و انرژی الکتریکی ذخیره شده در آن $187/5\mu J$ تغییر می‌کند. ظرفیت خازن برحسب میکروفاراد و بار نهایی آن بر حسب میکروکولن به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (پدیدهٔ فروشکست رخ نمی‌دهد.)

۱) ۲، ۱۰ ۲) ۲، ۴۰ ۳) ۴، ۴۰ ۴) ۴، ۱۰

۱۰۰- خازنی به ظرفیت $6\mu F$ را با اختلاف پتانسیل $10V$ پُر می‌کنیم. اگر خازن را از مولد جدا و دی‌الکتریکی با ثابت ۲ را بین صفحه‌های خازن قرار دهیم، انرژی آن چگونه تغییر می‌کند؟

۱) $150\mu J$ کاهش می‌یابد. ۲) $150\mu J$ افزایش می‌یابد. ۳) $300\mu J$ افزایش می‌یابد. ۴) $300\mu J$ کاهش می‌یابد.

۱۰۱- نسبت مرتبهٔ تندی حرکت کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد در یک سیم که اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است، به مرتبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط سوق آن‌ها کدام است؟

۱) 10^6 ۲) 10^7 ۳) 10^8 ۴) 10^9

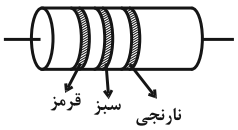
۱۰۲- بیشینهٔ بار الکتریکی ذخیره شده در باتری یک گوشی همراه برابر با $4000mAh$ است. اگر این باتری جریان متوسط $5\times10^4\mu A$ را فراهم آورد، به‌ترتیب از راست به چپ چند دقیقه طول می‌کشد تا این باتری خالی شود و طی این مدت چند میکروکولن بار الکتریکی در مدار شارش پیدا کرده است؟

۱) ۸۰، $14/4\times10^3$ ۲) ۴۸۰۰، $14/4\times10^3$ ۳) ۸۰، $14/4\times10^9$ ۴) ۴۸۰۰، $14/4\times10^9$

۱۰۳- ضریب دمایی مقاومت ویژهٔ الکتریکی سیمی از جنس مس برابر با $4/3\times10^{-3}(K^{-1})$ است. مقاومت الکتریکی این سیم در دمای $100^\circ C$ چند برابر مقاومت الکتریکی آن در دمای $273K$ است؟ (دمای پایین‌تر را به‌عنوان دمای مرجع در نظر بگیرید.)

۱) ۰/۴۳ ۲) ۱/۴۳ ۳) $\frac{100}{143}$ ۴) $\frac{100}{43}$

۱۰۴- مقدار مقاومت ترکیبی شکل زیر برحسب کیلواهم کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ (قرمز ≡ ۲، نارنجی ≡ ۳، سبز ≡ ۵)



۱) ۱۹ ۲) ۳۱
۳) ۲۸ ۴) ۳۵

۱۰۵- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) از ترمیستور به‌عنوان حسگر دما در مدارهای حساس به دما استفاده می‌شود.

۲) در نوعی از مقاومت‌های نوری که از جنس نیم‌رسانای خالص هستند، با کاهش شدت نور تابیده شده، بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی افزوده شده و از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود.

۳) در دیودها، مقاومت الکتریکی در برابر عبور جریان از یک سوی خاص، بسیار زیاد است.

۴) LED، نوعی دیود است که با مصرف توان الکتریکی ناچیزی، نور قابل ملاحظه‌ای تولید می‌کند.

شیمی ۳

مولکولها در خدمت تندرستی
صفحه‌های ۱ تا ۲۸

شیمی ۳

۱۰۶- کدام گزینه صحیح است؟ $(H=۱, C=۱۲, N=۱۴, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) گرد و غبار هوا برخلاف لکه‌های چربی، جزو آلاینده‌ها به‌شمار می‌رود.

۲) تعداد مول اتم‌های موجود در یک گرم اتیلن گلیکول، بیشتر از تعداد اتم‌های موجود در یک گرم اوره است.

۳) با شستن عسل توسط آب، آب نقش حلال را داشته و مولکول‌های عسل در آب پخش نمی‌شوند.

۴) چربی‌ها، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند.

۱۰۷- چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف) انسان‌ها با الهام از طبیعت و شناخت مولکول‌ها و رفتار آنها، راهی برای زدودن آلودگی‌ها پیدا کردند.

ب) شوینده‌ها بر اساس خاصیت اسیدی یا بازی عمل می‌کنند.

پ) نیاکان ما به تجربه پی بردند که اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کنند و سپس با آب گرم شست‌وشو دهند، آسان‌تر تمیز می‌شوند.

ت) امید به زندگی، شاخصی است که در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد و در مناطق توسعه‌یافته و برخوردار، کم‌تر از مناطق کم‌برخوردار است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸- پاک کننده‌های صابونی ..... پاک‌کننده‌های غیر صابونی، آروماتیک نیستند و در آب‌های سخت، خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ ..... و با فرض برابر بودن تعداد اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی، اختلاف جرم مولی آن‌ها ..... ۳۶ گرم بر مول است.
(کاتیون‌های موجود در ساختار هر دو پاک‌کننده را یکسان در نظر بگیرید.) $(C=۱۲, S=۳۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) برخلاف – نمی‌کنند – بیشتر از
۲) برخلاف – نمی‌کنند – برابر با
۳) همانند – می‌کنند – برابر با
۴) همانند – نمی‌کنند – بیشتر از

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

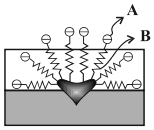
۱) صابون‌های جامد را نمی‌توان از گرم کردن روغن‌های گوناگون مثل روغنی با فرمول مولکولی $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ با سدیم هیدروکسید تهیه کرد.

۲) صابون ماده‌ای است که هم در آب و هم در چربی‌ها حل می‌شود.

۳) صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب و صابون مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب است.

۴) لکه‌های حاصل از آب قند را می‌توان هم با آب و هم با صابون شست و لباس‌ها را تمیز کرد.

۱۱۰- چند مورد از مطالب بیان شده همواره صحیح می‌باشد؟



الف) مطابق شکل مقابل که یکی از مراحل پاک شدن لکهٔ چربی با صابون را نشان می‌دهد، قسمت A آب دوست بوده و قسمت B در چربی حل می‌شود.

ب) صابون‌ها در آب حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم، نسبت به آب مقطر کمتر کف کرده ولی قدرت پاک‌کنندگی بالاتری دارند.

پ) بر اثر افزودن ۱ مول منیزیم کلرید در محلول آبی صابون، رسوب RCOOMg ایجاد می‌شود.

ت) قدرت پاک کنندگی یک نوع صابون در دمای $۲۰^\circ C$ در آب دریا، بیشتر از دمای $۱۵^\circ C$ در آب چشمه است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۱- افزودن ..... و ..... به آب، باعث افزایش یون ..... و خصلت ..... آن می‌شود.

۱) CaO ، $CO_۲$، هیدروکسید، بازی
۲) $CO_۲$ ، BaO، هیدرونیوم، بازی
۳) $SO_۳$ ، $CO_۲$، هیدرونیوم، اسیدی
۴) BaO ، CaO، هیدروکسید، اسیدی

۱۱۲- اگر غلظت تعادلی HF در دمای مشخص $0/5\frac{mol}{L}$ باشد و ثابت تعادل این اسید برابر با 5×10^{-7} باشد، غلظت تعادلی یون هیدرونیوم چند $\frac{mol}{L}$ است؟

۱) 25×10^{-8} ۲) $2/5\times10^{-4}$ ۳) 5×10^{-4} ۴) 5×10^{-7}

۱۱۳- با توجه به شکل‌های زیر، چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟

(۱)

(۲)

(۳)

* شکل (۱)، مربوط به انحلال اکسیدی فلزی در آب است که باعث می‌شود محیط آب اسیدی شود.
* شکل (۲)، محلولی از الکترولیت قوی مانند HF است که رسانایی الکتریکی بالایی دارد.
* شکل (۳)، یونش اسیدی را نشان می‌دهد که درجهٔ یونش آن ۱ می‌باشد.
* شکل (۳) می‌تواند مربوط به محلول نیتریک اسید یا هیدروبرمیک اسید باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴- کدام گزینه نادرست است؟

۱) کربوکسیلیک اسیدها از جمله اسیدهای ضعیف هستند که تنها هیدروژن گروه کربوکسیل آن‌ها می‌تواند به‌صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

۲) اسیدهای موجود در سرکه سیب، انگور، ریواس و مرکبات از جمله اسیدهای خوراکی و ضعیف هستند.

۳) با یونش مقداری منیزیم هیدروکسید در آب، تعداد اتم‌های موجود در یک واحد کاتیونی، نصف تعداد اتم‌های موجود در یک واحد آنیونی خواهد بود.

۴) واکنش‌های رفت و برگشت در سامانه‌های تعادلی به طور پیوسته و با سرعت برابر انجام می‌شوند به همین دلیل مقدار شرکت‌کننده‌ها در سامانه ثابت می‌ماند.

۱۱۵- اگر در محلول ۰/۱ مولار HF، به‌ازای حل شدن ۲۰۰ مولکول از آن، ۲۶۰ ذره به آب اضافه شود، درجهٔ یونش HF چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

شیمی ۱

شیمی ۱
کیهان زادگاه الفبای هستی
صفحه‌های ۲۴ تا ۵۲

۱۱۶- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) مدل اتمی بور، قادر به توجیه طیف نشری خطی همهٔ اتم‌ها می‌باشد.

۲) هرچه انرژی دریافت شده توسط الکترون بیشتر باشد، در هنگام بازگشت به حالت پایه، نور با طول موج کوتاه‌تری را نشر می‌دهد.

۳) هنگامی که به اتم‌های یک عنصر، در حالت فیزیکی استاندارد آن، گرما بدهیم، الکترون‌ها از لایه‌ای به لایهٔ بالاتر منتقل می‌شوند.

۴) در نتیجهٔ جابه‌جایی الکترون بین لایه‌های الکترونی، انرژی با طول موج معین جذب می‌شود.

۱۱۷- نسبت مجموع الکترون‌های با $l=1$ و $l=2$ در عنصر $_{29}Cu$ به تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت $_{21}Sc$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{22}{3}$ ۴) ۱۱

۱۱۸- در رابطه با عناصر $_{۳۳}As$ و $_{۲۱}Sc$ چه تعداد از مطالب زیر درست است؟

الف) هر دو عنصر متعلق به عناصر دستهٔ d جدول تناوبی هستند.

ب) تفاوت تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت آنها برابر ۳ است.

پ) در لایهٔ سوم هر دو عنصر، تعداد الکترون‌های برابری وجود دارد.

ت) تعداد الکترون‌ها با $l = ۰$ در هر دو عنصر برابر است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۱۹- شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت اتم کدام دو عنصر با هم برابر نیست؟

۱) $_{۳۹}Y$ ، $_{۱۳}Al$ ۲) $_{۳۴}Se$ ، $_{۴۲}Mo$

۳) $_{۵۳}I$ ، $_{۲۵}Mn$ ۴) $_{۴۵}Rh$ ، $_{۲۳}V$

۱۲۰- آرایش الکترونی اتمی به $۴s^۲ ۴p^۴$ ختم می‌شود. در آرایش الکترون – نقطه‌ای این اتم ..... نقطه در اطراف نماد آن وجود دارد. این عنصر در گروه ..... جدول تناوبی قرار دارد و با عنصر ..... هم‌دوره است.

۱) ۴، ۱۶، $_{۱۷}Cl$ ۲) ۴، ۱۶، $_{۳۵}Br$

۳) ۶، ۱۶، $_{۳۸}Sr$ ۴) ۶، ۱۶، $_{۲۶}Fe$

۱۲۱- همهٔ عبارات زیر درست‌اند، به جز:

۱) هر ترکیب یونی از واکنش بین یک یا چند کاتیون و آنیون به‌دست می‌آید که از لحاظ بار الکتریکی خنثی است.

۲) گاز کلر از مولکول‌های تک اتمی Cl ساخته شده و دارای خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی است.

۳) جفت الکترون اشتراکی میان دو اتم نافلز در یک مولکول دو اتمی نشان‌دهندهٔ یک پیوند کووالانسی است.

۴) در مولکول آب، اتم‌های اکسیژن و هیدروژن با اشتراک گذاشتن الکترون یا الکترون‌های لایهٔ ظرفیت خود، به آرایش گاز نجیب هم‌دورهٔ خود می‌رسند.

۱۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

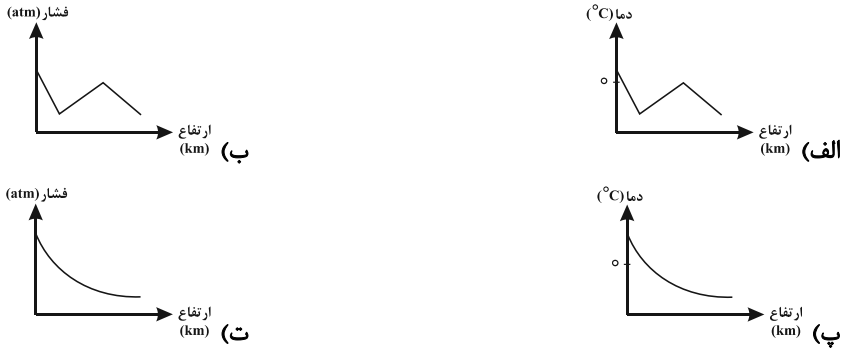
۱) مجموع درصد حجمی گازهای نجیب به ۰/۱٪ از حجم کل گازهای هواکره نمی‌رسد.

۲) گاز آرگون در میان اجزای هواکره رتبهٔ سوم را از نظر درصد حجمی دارد.

۳) قبل از تهیهٔ هوای مایع باید گرد و غبار، رطوبت و کربن دی‌اکسید از هوا خارج شود.

۴) هنگام تقطیر هوای مایع جداسازی اکسیژن صددرصد خالص فرایندی دشوار است.

۱۲۳- کدام نمودار به‌ترتیب تغییرات دما و تغییرات فشار را با افزایش ارتفاع در هواکره به‌درستی نشان می‌دهد؟



۱) الف و ب ۲) پ و ب ۳) الف و ت ۴) پ و ت

۱۲۴- چه تعداد از موارد زیر از کاربردهای گاز نیتروژن می‌باشد؟

* نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی * پر کردن تایر خودروها

* جوشکاری * پرکردن بالن‌های هواشناسی * بسته‌بندی مواد غذایی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۵- اگر در لایهٔ تروپوسفر (تا ۱۱ کیلومتر از سطح زمین) به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع، دما به اندازهٔ ۶ درجهٔ سانتیگراد افت کند و در لایهٔ استراتوسفر (بعد از ۱۱ کیلومتر) دما به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع ، ۱/۶ درجهٔ سانتیگراد افزایش یابد، دما در ارتفاع ۴۰km از سطح زمین، حدود چند درجهٔ سانتیگراد می‌باشد؟ (دما را در سطح زمین، ۱۴ درجهٔ سانتیگراد در نظر بگیرید.)

۱) ۱۲۶/۴ ۲) ۵/۶ ۳) -۵/۶ ۴) -۱۹/۶

شیمی ۲

شیمی ۲
قدر هدایای زمینی را بدانیم +
در پی غذای سالم
صفحه‌های ۲۸ تا ۵۸

۱۲۶- کدام گزینه نادرست است؟

۱) نفت خام یکی از سوخت‌های فسیلی است که به شکل مایع غلیظ قهوه‌ای رنگ متمایل به سبز است.

۲) نقش عمدهٔ نفت خام در دنیا، تأمین انرژی می‌باشد و مادهٔ اولیه برای تهیهٔ مواد مورد استفاده در صنایع گوناگون است.

۳) حدود ۴۰ درصد از نفت خام استخراجی، برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی به کار می‌رود.

۴) نفت خام مخلوطی از کربوهیدرات‌ها است و هر بشکه نفت خام هم‌ارز با ۱۵۹ لیتر است.

۱۲۷- چند مورد از موارد زیر صحیح است؟

الف) عنصر کربن در خانهٔ چهارم جدول دوره‌ای عناصر جای داشته و در لایهٔ ظرفیت خود، ۶ الکترون دارد.

ب) اتم کربن رفتارهای منحصربه‌فردی دارد که آن را از دیگر عنصرهای جدول متمایز می‌سازد.

پ) تعداد ترکیب‌های شناخته‌شده از اتم کربن، از مجموع ترکیب‌های شناخته شده از دیگر عنصرهای جدول دوره‌ای بیشتر است.

ت) اتم کربن برای رسیدن به آرایش هشت‌تایی می‌تواند دو پیوند یگانه و یک پیوند دوگانه، یا یک پیوند سه‌گانه و یک پیوند دوگانه بدهد.

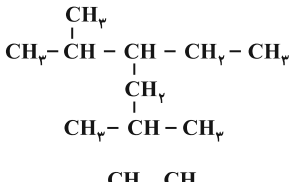
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

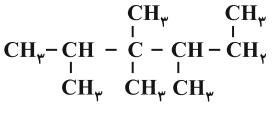
۱۲۸- کدام گزینه مقایسهٔ ویژگی مواد را به‌درستی نشان می‌دهد؟

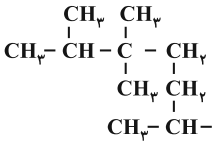
۱) چسبندگی: $C_{14}H_{30} > C_{15}H_{32}$ ۲) نقطهٔ جوش: $C_{16}H_{34} > C_{14}H_{30}$

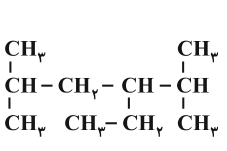
۳) فراریت: $C_{15}H_{32} < C_{16}H_{34}$ ۴) تمایل به جاری شدن: $C_{16}H_{34} > C_{15}H_{32}$

۱۲۹- کدام‌یک از فرمول‌های ساختاری زیر مربوط به یک آلکان هستند؟

الف)


ب)


پ)


ت)


۱) الف و ب ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

۱۳۰- کدام گزینه نادرست است؟ $(H=۱, C=۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) درصد جرمی هیدروژن در آلکان‌ها برخلاف آلکین‌ها، با افزایش تعداد اتم‌های کربن، کاهش می‌یابد.

۲) ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها، تعداد هیدروژن‌های کمتری نسبت به ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها دارد.

۳) آلکن‌ها در واکنش با برم مایع، رنگ قرمز محلول را از بین می‌برند.

۴) نفت سبک کشورهای عربی برخلاف نفت سنگین آن‌ها، دارای درصد برابری از بنزین و گازوئیل است.

۱۳۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) نفتالن مدت‌ها به‌عنوان ضد بید، برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است.

۲) ترکیب‌های آلی بسیاری از جمله سیکلوهگزان شناخته شده‌اند که در آنها، اتم‌های کربن طوری به یکدیگر متصل شده‌اند که ساختاری حلقوی به وجود آورده‌اند.

۳) بنزن، سرگروه خانوادهٔ مهمی از هیدروکربن‌ها به نام آروماتیک است.

۴) آلکین‌ها واکنش‌پذیری کمی دارند و با مواد شیمیایی اندکی واکنش می‌دهند.

۱۳۲- چند مورد از موارد زیر درست است؟

الف) از سال ۲۰۱۳، میزان تولید و بهره‌برداری جهانی غلات از میزان ذخیره شدهٔ آن بیشتر شده است.

ب) در تولید انبوه، به‌دلیل فساد مواد غذایی و دشواری نگهداری آن‌ها، حفظ کیفیت و ارزش مواد غذایی اهمیت بسزایی دارد.

پ) بیشترین سرانهٔ مصرف مواد خوراکی در ایران، مربوط به برنج است.

ت) گوشت قرمز و ماهی تنها به دلیل غنی بودن از پروتئین مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۳۳- کدام‌یک از مطالب زیر دربارهٔ دما نادرست است؟

الف) یکای رایج آن درجهٔ سلسیوس است که با نماد « T » نشان داده می‌شود.

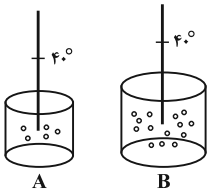
ب) معیاری برای توصیف مجموع انرژی جنبشی ذرات سازندهٔ یک ماده است.

پ) با تغییر حالت فیزیکی یک ماده در اثر افزایش دما از $-۲^\circ C$ به $۲^\circ C$، فقط یکی از عوامل مؤثر بر انرژی گرمایی آن تغییر می‌کند.

ت) هیچ‌گاه یک نمونه ماده با دمای $۱۰^\circ C$ نمی‌تواند انرژی گرمایی بیشتری از یک نمونه ماده با دمای ۳۰۰ کلوین داشته باشد.

۱) الف و ب ۲) ب و پ ۳) الف، ب و ت ۴) الف، پ و ت

۱۳۴- دو ظرف A و B را در نظر بگیرید، کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟



«..... در دو ظرف با هم برابر و ..... در ظرف B بیشتر از ظرف A است.»

۱) میانگین تندی ذره‌ها – انرژی جنبشی ذره‌ها ۲) انرژی گرمایی – انرژی جنبشی ذره‌ها

۳) میانگین تندی ذره‌ها – انرژی گرمایی ۴) انرژی جنبشی ذره‌ها – میانگین تندی ذره‌ها

۱۳۵- به آلیاژی از طلا و نقره به جرم ۱۲ گرم، ۱۹/۲ ژول گرما می‌دهیم تا دمای آن از ۲۷۳K به ۲۸۳K برسد. تقریباً چند درصد از جرم این آلیاژ را طلا به خود اختصاص می‌دهد؟ $(c_{Ag}=۰/۱۲, c_{Au}=۰/۲۴ : j.g^{-۱}.^\circ C^{-۱})$

۱) ۶۶/۶۶ ۲) ۳۳/۳۳ ۳) ۵۴ ۴) ۴۶

حسابان ۲

۱- گزینهٔ «۲»

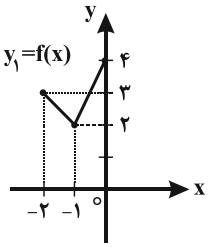
$x > -2; f(x) = -(x+1)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$

$x < -2 ; f(x) = 2 \Rightarrow a + c = 2 \Rightarrow c = 3$

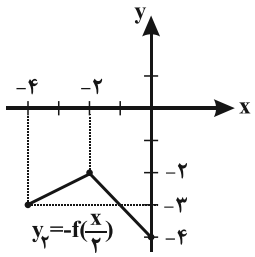
$x = -2 ; f(-2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c + 2b = 0 \Rightarrow b = -1$

۲- گزینهٔ «۲»

ابتدا باید نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ کافی است نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.



۳- گزینهٔ «۳»

دامنهٔ تابع $f(x)$ دو برابر شده است؛ یعنی در راستای محور x ها، دو برابر منبسط شده است. هم‌چنین یک واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل شده است. بنابراین رابطهٔ $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ صحیح است.

۴- گزینهٔ «۴»

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow[\text{۱ واحد به پایین}]{\text{۲ واحد به راست}} g(x) = (x-1)^2 - 1$$

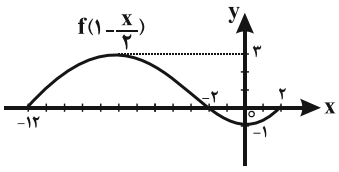
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-1}{4}\right) = g\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

۵- گزینهٔ «۱»

ابتدا باید نمودار تابع $f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ را رسم کنیم. برای این امر کافی است نمودار $f(x+2)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، سپس دامنه (x ها) را دو برابر و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کنیم؛ بنابراین تابع $f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



حال بازه‌ای از x جزء دامنه است که به ازای آن‌ها x و $f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ هم‌علامت یا برابر صفر باشند.

		-۱۲		-۲		۰		۲	
x	−		−		−	۰	+		+
$f\left(1-\frac{x}{2}\right)$	×	۰	+	۰	−		−	۰	×
$xf\left(1-\frac{x}{2}\right)$	×	۰	−	۰	+	۰	−	۰	×

$$xf\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow D_y = [-2,0] \cup \{-12,2\}$$

۶- گزینهٔ «۱»

$$D_{f(2-x)} = [-1,2] \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال دو واحد}} D_{f(-x)} = [-3,0]$$

$$\xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} D_{f(x)} = [0,3] \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۴ واحد}} D_{f(x+4)} = [-4,-1]$$

$$\xrightarrow[\text{افقی با ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض در راستای}} D_{f(3x+4)} = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

۷- گزینهٔ «۲»

با توجه به نمودارها درمی‌یابیم که:

$$D_f = [0,4], R_f = [-2,2], D_g = [-4,4], R_g = [-1,1]$$

با انتقال a واحد نمودار تابع f به سمت چپ، منقبض‌کردن دو برابری آن در راستای عمودی و انتقال یک واحد به سمت بالا به نمودار $y_1 = \frac{1}{2}f(x+a) + 1$ خواهیم رسید؛ بنابراین داریم:

$$D_{y_1} = [-a, 4-a], R_{y_1} = [0,2]$$

با منقبض کردن دو برابر $g(x)$ در راستای افقی و سپس انتقال b واحد نمودار در راستای عمودی به نمودار $y_2 = g(2x) + b$ خواهیم رسید بنابراین داریم:

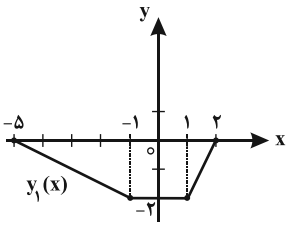
$$D_{y_2} = [-2,2], R_{y_2} = [b-1, b+1]$$

دامنه‌های y_1 و y_2 را با هم و بردهای آن‌ها را نیز با هم برابر درنظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} [-a, 4-a] = [-2,2] \Rightarrow a = 2 \\ [b-1, b+1] = [0,2] \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

۸– گزینهٔ «۳»

اگر نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به نمودار تابع $y_1(x)=-f(x+1)$ خواهیم رسید:



حال با دقت به دو نمودار $g(x)$ و $y_1(x)$ درمی‌یابیم که برای رسیدن به نمودار تابع $g(x)$، $y_1(x)$ را باید در راستای افقی، دو برابر منقبض کنیم و سپس دو واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم. یعنی:

$$g(x)=2+y_1(2x)\Rightarrow g(x)=2-f(2x+1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}\Rightarrow 2m+n=6$$

۹– گزینهٔ «۳»

$$f(x^2)\ \text{دامنهٔ}: 1\le x^2<4\Rightarrow\begin{cases}1\le x<2\\ \text{یا}\\ -2<x\le -1\end{cases}\quad(1)$$

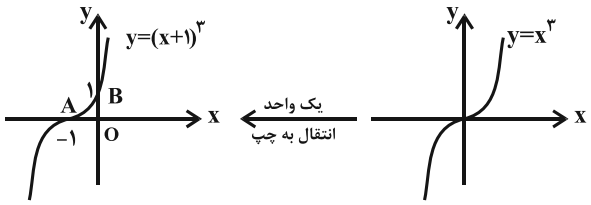
$$g(3-2x)\ \text{دامنهٔ}: 2<3-2x<9\Rightarrow -1<-2x<6$$

$$\Rightarrow -3<x<\frac{1}{2}\quad(2)$$

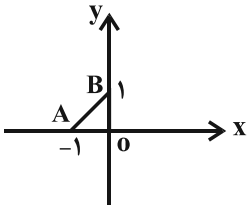
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} D_h=(-2,-1]$$

۱۰– گزینهٔ «۲»

نمودار تابع $y=(x+1)^3$ را به‌کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم می‌کنیم.



شکل مورد نظر، مثلث AOB در نمودار زیر است که مساحت آن $\frac{1}{2}$ می‌باشد.



۱۱– گزینهٔ «۴»

فرض می‌کنیم که ریشه‌ها α، β و γ باشند:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

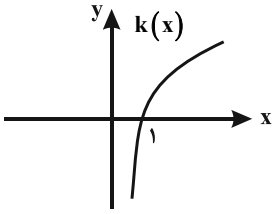
$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$$

$$\Rightarrow b=-\alpha\beta\gamma=-(+3)=-3\ ;$$

$$f(2)=15\Rightarrow 8+12+2a-3=15\Rightarrow a=-1$$

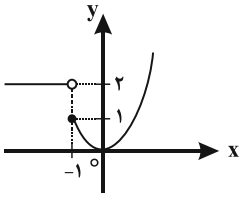
۱۲– گزینهٔ «۴»

کافی است نمودار تابع‌ها را رسم نماییم. به سادگی می‌بینیم نمودار $k(x)=\log_2^x$ مطابق شکل زیر، یک تابع اکیداً صعودی است.



۱۳– گزینهٔ «۲»

نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



بنابراین تابع در بازهٔ $[-1,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین داریم:

$$-1<a<b<0\xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{تابع اکیداً}}f(a)>f(b)$$

$$-1<a<b<0\Rightarrow a^2>b^2>0\xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{تابع اکیداً}}f(a^2)>f(b^2)$$

لازم به ذکر است که رابطهٔ گزینهٔ «۳» به ازای همه مقادیر a و b در بازهٔ $(-1,0)$ برقرار نیست. هم‌چنین با جای‌گذاری $f(a)=|a|^2$، $f(b)=|b|^2$ و استفاده از این نکته که $|a|^2<|a|$ می‌باشد، نادرستی رابطهٔ گزینهٔ «۴» نیز به‌سادگی اثبات می‌شود.

۱۴- گزینهٔ «۳»

ابتدا دامنهٔ ضابطه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}^{x+1}: x+1>0 \Rightarrow x>-1\\ \log_{\frac{1}{2}}^{2x-3}: 2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow x>\frac{3}{2} \quad (1)$$

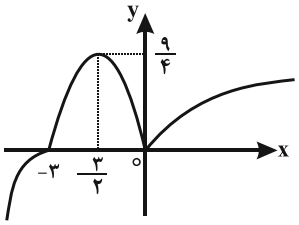
از طرفی تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x}$ اکیداً نزولی است؛ بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{x+1} < \log_{\frac{1}{2}}^{2x-3} \Rightarrow x+1>2x-3 \Rightarrow x<4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} x\in\left(\frac{3}{2},4\right)$$

۱۵- گزینهٔ «۳»

نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

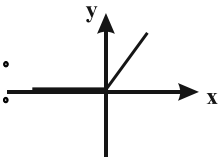


واضح است که این تابع در بازهٔ $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ صعودی، در بازهٔ $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ نزولی و در بازهٔ $[0,\infty)$ صعودی است. بنابراین گزینهٔ «۳» پاسخ صحیح سؤال است.

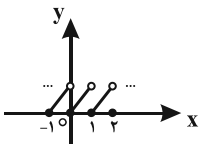
۱۶- گزینهٔ «۴»

نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

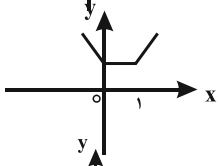
گزینهٔ «۱» صعودی است. $y=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$



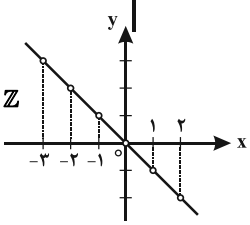
گزینهٔ «۲» غیریکنوا است. $y=x-[x]$



گزینهٔ «۳» غیریکنوا است. $y=|x|+|x-1|$



گزینهٔ «۴» نزولی است. $y=-x; x\notin\mathbb{Z}$



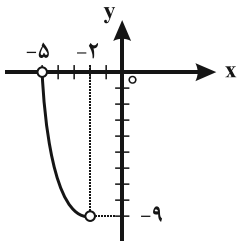
۱۷- گزینهٔ «۲»

$$f(x)=(x+2)^2-9$$

$$D_f: \left|x+\frac{7}{2}\right|<\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}<x+\frac{7}{2}<\frac{3}{2} \xrightarrow{-\frac{7}{2}} -\frac{10}{2}<x<-\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow D_f=(-5,-2)$$

تابع را در این بازه رسم می‌کنیم:



بنابراین، تابع $f(x)$ در بازهٔ داده‌شده نزولی است.

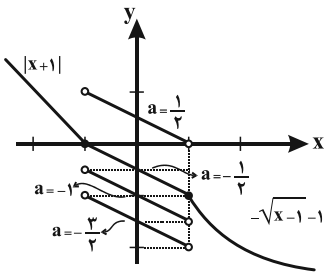
۱۸- گزینهٔ «۲»

$$f(|x|)-f(2)\ge 0 \Rightarrow f(|x|)\ge f(2)$$

چون تابع f اکیداً نزولی است، باید $|x|\le 2$ باشد؛ بنابراین $D_y: -2\le x\le 2$

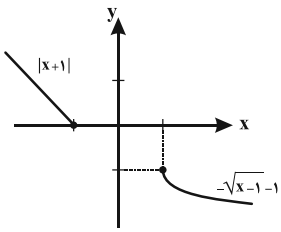
۱۹- گزینهٔ «۲»

راه حل اول: نمودار تابع $f(x)$ را برای مقادیر داده شدهٔ a رسم می‌کنیم:



واضح است که برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، فقط مقدار $a=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

راه حل دوم: ابتدا ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم:



حال برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

$$x=-1: \frac{1}{2}+a\le 0 \Rightarrow a\le -\frac{1}{2} \quad (1)$$

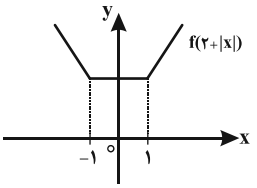
$$x=1: \frac{-1}{2}+a\ge -1 \Rightarrow a\ge -\frac{1}{2} \quad (2)$$

بنابراین داریم:

$$(1)\cap(2) \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۲۰- گزینهٔ «۳»

نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x+2)$ به‌دست آید. سپس به جای مقادیر تابع در x های منفی نمودار، قرینهٔ آن به‌ازای x های مثبت را نسبت به محور y ها قرار می‌دهیم تا نمودار $f(2+|x|)$ مطابق شکل زیر به‌دست آید:



مشاهده می‌شود که بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(2+|x|)$ در آن صعودی است، بازهٔ $[-1,+\infty)$ خواهد بود.

ریاضیات پایه

۲۱- گزینهٔ «۴»

بررسی موارد:

الف) تابع $g(x)=\frac{5}{2}$ وارون پذیر نیست.

ب) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آن‌گاه $(fog)(4)=f(g(4))=5$.

پ) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$؛ بنابراین f و g مساوی نیستند.

۲۲- گزینهٔ «۳»

معادله، تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$2\left[x^2\right]-3|x|-2=0$$

واضح است که باید $x\in\mathbb{Z}$ باشد؛ بنابراین:

$$x<0:\quad 2x^2+3x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2} & \text{غ.ق.ق}\\ x=-2 & \text{ق.ق}\end{cases}$$

$$x\geq 0:\quad 2x^2-3x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2} & \text{غ.ق.ق}\\ x=2 & \text{ق.ق}\end{cases}$$

در نتیجه $x=\pm 2$ جواب‌های معادله است.

۲۳- گزینهٔ «۲»

واضح است که برد تابع نیز باید سه عضوی باشد؛ بنابراین سه عضو متمایز از B باید انتخاب کنیم و این سه عضو، خود به $3!$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند (یعنی به عضوهای متفاوتی از A وصل شوند) که تعداد توابع $\binom{4}{3}\times 3!=24$ به‌دست می‌آید. به بیان دیگر، در تابع $f=\{(a,\square),(b,\square),(c,\square)\}$، $\square$ ها می‌توانند $4\times 3\times 2=24$ حالت را بپذیرند.

۲۴- گزینهٔ «۳»

$$\left.\begin{array}{l}f(a)=4\\ f(a)=a+1\end{array}\right\}\Rightarrow 4=a+1\Rightarrow a=3$$

واضح است که $g(x)=2x-1$ و دامنهٔ آن اعضای مجموعهٔ برد تابع f است.

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=D_f\cap R_f\Rightarrow D_{f+g}=\{4\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}f(4)=5\\ g(4)=2(4)-1=7\end{array}\right\}\Rightarrow f(4)+g(4)=12$$

۲۵- گزینهٔ «۲»

تابع $f(x)=3x+\sqrt{x}$ جمع دو تابع یک‌به‌یک است. بنابراین یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

تابع $h(x)=\sqrt{x}-3x$ دارای دو ریشهٔ $x=0$ و $x=\frac{1}{9}$ است. پس یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

تابع $k(x)=x+\frac{1}{|x|}$ در واقع دو ضابطه‌ای است:

$$k(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x} & ;x>0\\ x-\frac{1}{x} & ;x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x} & ;x>0\\ \frac{x^2-1}{x} & ;x<0\end{cases}$$

که مثلاً معادلهٔ $k(x)=3$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. پس تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

تابع $g(x)=x^2+|x|+100$ به دلیل اینکه $g(x)=g(-x)$، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

۲۶- گزینهٔ «۱»

تابع f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$4\left(a(2x)+b\right)=a(8x-1)+b-5\Rightarrow a+3b=-5\quad(1)$$

$$f^{-1}(3)=5\Rightarrow f(5)=3\Rightarrow 5a+b=3\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}a=1,b=-2\Rightarrow f(x)=x-2$$

$$\xrightarrow{f(2)=m}m=2-2=0$$

۲۷- گزینهٔ «۴»

$$y=\begin{cases}x & ;x<0\\ 3x & ;x\ge 0\end{cases}\Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\begin{cases}x & :x<0\\ \frac{1}{3}x & ;x\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\frac{2x-|x|}{3}$$

۲۸- گزینهٔ «۲»

در ابتدا، مجموعهٔ داده‌شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^3-m=4m^2-4\Rightarrow (m-4)(m^2-1)=0$$

$$\Rightarrow m=4 \text{ یا } m=1 \text{ یا } m=-1$$

$$\begin{cases}m=1\Rightarrow (1,0),(1,4)\in f\Rightarrow & \text{مجموعهٔ مورد نظر تابع نیست.}\\ m=-1\Rightarrow (1,0),(5,0)\in f\Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.}\\ m=4\Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.}\end{cases}$$

در نتیجه فقط برای $m=4$ است که تابع f وارون‌پذیر است.

۲۹- گزینهٔ «۴»

$$(4,4)\in fog\Rightarrow f(g(4))=4\Rightarrow (g(4),4)\in f$$

$$a=g(4)=6$$

$$(b,1)\in fog\Rightarrow f(g(b))=1\Rightarrow (g(b),1)\in f\Rightarrow g(b)=12$$

$$\Rightarrow b+\sqrt{b}=12\xrightarrow{\sqrt{b}=t,t\ge 0}t^2+t-12=0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-3)=0\Rightarrow \begin{cases}t=3 & \text{ق.ق}\\ t=-4 & \text{غ.ق.ق}\end{cases}\Rightarrow \sqrt{b}=3\Rightarrow b=9$$

$$\Rightarrow a+b=15$$

۳۰- گزینهٔ «۲»

رابطهٔ داده شده مشابه رابطهٔ بین سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی است. بنابراین تابع f به فرم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی و خطی است؛ یعنی $f(x)=\alpha x+\beta$.

$$\left.\begin{array}{l}f(-1)=-3\Rightarrow -\alpha+\beta=-3\\ f(2)=-1\Rightarrow 2\alpha+\beta=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\ \beta=-\frac{7}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x-7}{3}\Rightarrow f(5)=1$$

هندسه ۳

۳۱- گزینهٔ «۳»

می‌دانیم $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$، پس وارون ماتریس A^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$\left|A^{-1}\right|=-2-(-4)=2$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

حال $A\times B$ را حساب می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ 8 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -3\\ -7 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

گزینهٔ «۱» $B\times A$، گزینهٔ «۲» $B\times A^{-1}$ و گزینهٔ «۴» $A^{-1}\times B$ را نشان می‌دهد.

۳۲- گزینهٔ «۴»

$$\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$$

$a_{11}=1+1=2$ $\qquad$ $b_{12}=1\times 2=2$

$a_{12}=2^2-1=3$ $\qquad$ $b_{22}=2\times 2=4$

$a_{13}=3^2-1=8$ $\qquad$ $b_{32}=3\times 2=6$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k2}=2\times 2+3\times 4+8\times 6=64$$

۳۳- گزینهٔ «۳»

$$A^2+AB+3B=A(A+B)+3B=A\times 3I+3B$$

$$=3A+3B=3(A+B)=3\times 3I=9I$$

توجه داشته باشید که:

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=3I$$

۳۴- گزینهٔ «۱»

$$A=\frac{1}{2}\left(A^2-13I\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 10 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

۳۵- گزینهٔ «۳»

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

با استدلال استقرایی به‌راحتی می‌توان متوجه شد که $A^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$ است. در نتیجه داریم:

$$A^{12}+A^{13}=\begin{bmatrix}1&12\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&13\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&25\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}=29$$

۳۶- گزینهٔ «۴»

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=\bar{O}\ ,\ A^4=\bar{O}\ ,\ A^6=\bar{O}$$

$$A+A^2+A^4+A^6=A+A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\3&1&0\end{bmatrix}$$

۳۷- گزینهٔ «۴»

$$A^{-1}=A\Rightarrow AA^{-1}=A^2=I$$

$$\left(A+A^{-1}\right)^2=\left(A+A\right)^2=\left(2A\right)^2=4A^2=4I$$

۳۸- گزینهٔ «۳»

$$-A^6=\bar{O}\Rightarrow I^6-A^6=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)\left(I^5+I^4A+I^3A^2+I^2A^3+IA^4+A^5\right)=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)\left(I+A+...+A^5\right)=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)^{-1}=I+A+A^2+...+A^5$$

۳۹- گزینهٔ «۳»

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}AP\right)^2=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}9&0\\0&1\end{bmatrix}$$

۴۰- گزینهٔ «۲»

$$I-\lambda A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\lambda}{2}&-\frac{\lambda}{2}\\-\frac{\lambda}{2}&\frac{\lambda}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{\lambda}{2}&\frac{\lambda}{2}\\\frac{\lambda}{2}&1-\frac{\lambda}{2}\end{bmatrix}$$

شرط وارون‌پذیری $1-\lambda A$ این است که $\left|I-\lambda A\right|\neq 0$، پس داریم:

$$\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4}\neq 0\Rightarrow 1-\lambda\neq 0\Rightarrow\lambda\neq 1$$

ریاضیات گسسته

۴۱- گزینهٔ «۴»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ابتدا قضیهٔ شرطی را اثبات می‌کنیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\xrightarrow{\text{توان دوم}}a^2+\frac{1}{a^2}+2\geq 4\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$$

برای رد درستی عکس این قضیهٔ شرطی، می‌توان $a=-2$ را در نظر گرفت.

گزینهٔ «۲»: خود قضیهٔ شرطی واضح است. عکس آن می‌گوید اگر $a\neq -1$، آنگاه $a>0$ که $a=-2$ مثال نقض است و این گزینه رد می‌شود.

گزینهٔ «۳»: مثال نقض برای رد این عبارت $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=-\sqrt{2}$ است.

گزینهٔ «۴»: اگر $k^3>k^2$ باشد، می‌توانیم ثابت کنیم $k>1$.

$$k^3>k^2\Leftrightarrow k^2\times k>k^2\times 1\xleftarrow{k^2>0}k>1$$

تمام مراحل اثبات بالا دوطرفه است، بنابراین قضیهٔ گزینهٔ «۴» دو شرطی است.

۴۲- گزینهٔ «۳»

مثال نقض برای گزینهٔ «۳»: با فرض $p=2$ و $q=3$، عدد $p+q=5$ نیز عددی اول است. درستی گزینه‌های دیگر را خودتان بررسی کنید.

۴۳- گزینهٔ «۳»

گزینه «۱»: $a^2\mid a+b\xrightarrow{\times(a-b)}\begin{cases}a^2\mid a^2-b^2\\a^2\mid a^2\end{cases}\xRightarrow{\text{تفاضل}}a^2\mid b^2$

گزینهٔ «۲»: $\begin{cases}a^2\mid a+b\\a\mid a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\mid a+b\\a\mid a\end{cases}\xRightarrow{\text{تفاضل}}\begin{cases}a\mid b\\a\mid a\end{cases}\Rightarrow a\mid 3b-2a$

گزینهٔ «۴»: $\begin{cases}a^2\mid b^2\\a^2\mid a^2\end{cases}\xRightarrow{\text{مجموع}}a^2\mid a^2+b^2$

مثال نقض برای گزینهٔ «۳»: $a=3$، $b=6$.

۴۴- گزینهٔ «۴»

$$\left.\begin{matrix}x+3\mid 4x-1\\x+3\mid 4x+12\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+3\mid 13\Rightarrow x+3=13\ \text{یا}\ 1\ \text{یا}\ -1\ \text{یا}\ -13$$

بنابراین تنها مقدار طبیعی ممکن برای x، عدد ۱۰ است و $A=(10,3)$ تنها نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی می‌باشد.

۴۵– گزینهٔ «۲»

مثال نقض: اگر $a=4$ و $b=6$ باشد، آنگاه $4 \nmid 6$ ولی $(4,6)=2\neq 1$

۴۶– گزینهٔ «۲»

با استفاده از مثال نقض می‌توان درستی گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» را رد کرد.

به عنوان مثال فرض کنید $a=24$ و $b=9$ باشد، در این‌صورت $q=2$ و $r=6$ است.

گزینهٔ «۱»: $(24,6)\neq(9,6)$

گزینهٔ «۳»: $(24,2)\neq(9,2)$

گزینهٔ «۴»: $(24,9)\neq(24,6)$

حال فرض کنید $d=(a,b)$ باشد، در این‌صورت با توجه به این که $a=bq+r$ است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid b\Rightarrow d\mid bq \\ d\mid a \end{array}\right\}\Rightarrow d\mid a-bq\Rightarrow d\mid r$$

بنابراین دو رابطهٔ $d\mid b$ و $d\mid r$ برقرار است.

حال فرض کنید $m\mid b$ و $m\mid r$. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m\mid b\Rightarrow m\mid bq \\ m\mid r \end{array}\right\}\Rightarrow m\mid bq+r\Rightarrow m\mid a$$

$m\mid a$ و $m\mid b$ و چون $d=(a,b)$، پس $m\leq d$. بنابراین $(b,r)=d$ است.

۴۷– گزینهٔ «۲»

$$x=27q_1+12\Rightarrow 2x=2(27q_1)+24$$

$$y=27q_2+13\Rightarrow 3y=3(27q_2)+39$$

$$\Rightarrow 2x-3y=27(2q_1-3q_2)-15=27q-15$$

$$=27q-27+12=27(q-1)+12\Rightarrow r=12$$

۴۸– گزینهٔ «۳»

$$a=23q+7q\Rightarrow 7q<23\Rightarrow q<\frac{23}{7}\Rightarrow q\leq 3$$

$$q_{max}=3\Rightarrow a_{max}=30(3)=90\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=9$$

۴۹– گزینهٔ «۲»

با توجه به الگوریتم تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a=bq+10 \\ a+100=bq'+11 \end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} 100=b(q'-q)+1$$

$$\Rightarrow b(q'-q)=99\Rightarrow b\mid 99$$

حال با توجه به آن که باقی‌مانده‌ها برابر با ۱۰ و ۱۱ شده‌اند، پس $b>11$ است.

از آن جا که $3\times 33=99\times 1=99$، b می‌تواند دو مقدار $b=33$ و $b=99$ را بپذیرد.

۵۰– گزینهٔ «۱»

عدد k را با توجه به باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۵، به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} k=5q \\ k=5q+1 \\ k=5q+2 \\ k=5q+3 \\ k=5q+4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k^2+1=5q'+1 \\ k^2+1=5q'+2 \\ k^2+1=5q'+5=5q_1 \\ k^2+1=5q'+10=5q_2 \\ k^2+1=5q'+17=5q_3+2 \end{cases}$$

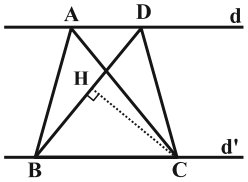
پس باقی‌ماندهٔ k^2+1 بر ۵، می‌تواند یکی از اعداد صفر، ۱ و ۲ باشد.

هندسه ۱

۵۱– گزینهٔ «۲»

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آن‌ها، روی یک خط موازی با آن قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

بنابراین دو مثلث ABC و BCD هم‌مساحت‌اند. پس:

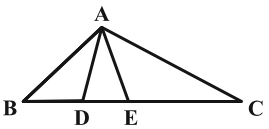


$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{BCD}}=8$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BCD}}=\frac{CH\times BD}{2}=8\xrightarrow{DB=4}CH=4$$

۵۲– گزینهٔ «۲»

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست. بنابراین:



$$\begin{cases} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}=\dfrac{CE}{DE}=3\Rightarrow DE=\dfrac{1}{3}CE \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\dfrac{CE}{BD}=2\Rightarrow BD=\dfrac{1}{2}CE \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+CE}{\frac{1}{3}CE}=\frac{\frac{1}{2}CE+\frac{1}{3}CE+CE}{\frac{1}{3}CE}=\frac{11}{2}=5/5$$

۵۳- گزینهٔ «۲»

دو مثلث ABD و ABC، دارای قاعدهٔ مشترک AB هستند و همچنین ارتفاع‌های نظیر این قاعده در دو مثلث، طول یکسانی دارند (فاصلهٔ دو خط موازی). پس $S_{ABC} = S_{ABD}$. با کم‌کردن مساحت مثلث AOB از مساحت این دو مثلث، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{AOD}} = S_{\overset{\Delta}{BOC}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOD}}}{S_{\overset{\Delta}{DOC}}} = \dfrac{AO}{OC} \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}} = \dfrac{AO}{OC}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOD}}}{S_{\overset{\Delta}{DOC}}} = \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۹} = \frac{۴}{x} \Rightarrow x^{۲} = ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۴ + ۶ + ۹ + ۶ = ۲۵$$

۵۴- گزینهٔ «۲»

بنابه فرض $BM = CM$ است. به کمک قضیهٔ تالس داریم:

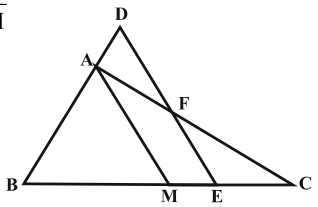
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMC} : EF \parallel AM \Rightarrow \dfrac{EF}{AM} = \dfrac{CE}{CM} \\ \overset{\Delta}{BDE} : AM \parallel DE \Rightarrow \dfrac{DE}{AM} = \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BE}{CM}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE + BE}{CM} = \frac{BC}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{۲CM}{CM} = ۲$$

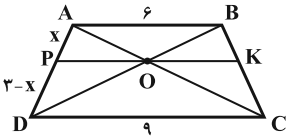
$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} + \frac{DE}{AM} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AM} = ۲ - \frac{۳}{۵} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$



۵۵- گزینهٔ «۴»

در ذوزنقهٔ شکل زیر، خط KP گذرا از O و به موازات قاعده‌ها رسم شده است.



با نوشتن قضیهٔ تالس در مثلث ACD داریم:

$$OP \parallel CD \Rightarrow \frac{x}{AD} = \frac{OP}{CD} \Rightarrow OP = \frac{x \times CD}{AD} = \frac{x \times ۹}{۳} = ۳x$$

حال با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث ABD داریم:

$$OP \parallel AB \Rightarrow \frac{OP}{AB} = \frac{DP}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x}{۶} = \frac{۳ - x}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۳ - x}{۳} \Rightarrow ۳x = ۶ - ۲x \Rightarrow x = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

طول قطعهٔ دیگر $۳ - ۱/۲ = ۱/۸$ است. پس طول قطعهٔ کوچک ۱/۲ می‌باشد.

آمار و احتمال

۵۶- گزینهٔ «۲»

این مجموعه دارای ۴ عضو است. دقت کنید که $\{b,a\} = \{b,a,a\} = \{a,b\}$ پس $A = \{\{a\},\{b\},\{b,a\},b\}$، چون زیرمجموعه‌های شامل عضو $\{a\}$ را می‌خواهیم، $\{a\}$ را کنار می‌گذاریم. دقت کنید که زیرمجموعه شامل $\{a\}$ قطعاً ناتهی هست و نیازی به اعمال شرط «ناتهی» در انتخاب $\{b\},\{b,a\},b$ نداریم؛ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر $۲^{۳} = ۸$ است.

۵۷- گزینهٔ «۳»

به وضوح می‌توان مشاهده کرد که $\{۱,۲\}$ عضوی از مجموعه A می‌باشد، پس گزینهٔ «۱» صحیح است. ۱ عضو A است، پس $\{۱\}$ زیرمجموعهٔ A می‌باشد و گزینهٔ «۲» نیز صحیح است. می‌دانیم تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است، پس گزینهٔ «۴» نیز صحیح می‌باشد. ولی برای این که $\{۱,۲\}$ زیرمجموعهٔ A باشد، باید هم ۱ و هم ۲، عضو A باشند که می‌توان دید، عدد ۲ عضوی از مجموعهٔ A نیست.

۵۸- گزینهٔ «۱»

$$m \in B\ ,\ A = B \Rightarrow m = ۱ \text{ یا } ۲$$

$$m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} m^{۲} + m = ۲ \\ -m^{۲} + ۲m = ۱ \end{cases} \Rightarrow B = \{۱,۲\} = A$$

$$m = ۲ \Rightarrow \begin{cases} m^{۲} + m = ۶ \\ -m^{۲} + ۲m = ۰ \end{cases} \Rightarrow B = \{۰,۲,۶\} \neq A$$

پس دو مجموعه، تنها به ازای $m = ۱$، برابر یکدیگرند.

۵۹- گزینهٔ «۲»

اعضای مجموعهٔ B، عضوهایی از مجموعهٔ A هستند که زیر مجموعهٔ A نیز باشند:

$$\{۱\} \in A, \{۱\} \subseteq A$$

(این عضو A، یک زیرمجموعهٔ تک عضوی A نیز هست.)

$$\{۱,\{۱\}\} \in A, \{۱,\{۱\}\} \subseteq A$$

(این عضو A، یک زیرمجموعهٔ دو عضوی A نیز هست.)

$$\{۱,۲,\{۱\}\} \in A, \{۱,۲,\{۱\}\} \subseteq A$$

(این عضو A، یک زیرمجموعهٔ سه عضوی A نیز هست.)

بنابراین از ۵ عضو A، ۳ عضو هستند که زیرمجموعهٔ A نیز محسوب می‌شوند. پس B، سه عضو دارد.

۶۰- گزینهٔ «۳»

با توجه به این‌که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$. بنابراین:

$$\begin{cases} ۳ \notin C \Rightarrow ۳ \notin A \\ ۲ \notin B \Rightarrow ۲ \notin A \end{cases} \xrightarrow{۱ \notin A} A = \varnothing$$

۶۱- گزینهٔ «۱»

حالت اول: اگر بزرگ‌ترین عضو ۷ و کوچک‌ترین عضو ۲ باشد، در این صورت باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۲ و ۷ و فاقد ۱ را حساب کنیم که برابر است با: $۲^۴ = ۱۶$

حالت دوم: اگر بزرگ‌ترین عضو ۶ و کوچک‌ترین عضو ۳ باشد، آنگاه باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۳ و ۶ و فاقد ۱، ۲ و ۷ را محاسبه کنیم که برابر است با: $۲^۲ = ۴$

حالت سوم: بزرگ‌ترین عضو ۵ و کوچک‌ترین عضو ۴ باشد، که فقط مجموعهٔ $\{۴,۵\}$ جواب خواهد بود.

بنابراین تعداد کل حالات برابر با $۱ + ۴ + ۱۶$ یعنی ۲۱ است.

تذکر: در یک مجموعهٔ n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های شامل k عضو (یا فاقد k عضو) برابر با ۲^{n-k} می‌باشد.

۶۲- گزینهٔ «۴»

اگر یک افراز از مجموعهٔ پنج عضوی A بخواهد شامل یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد، بخش دیگر افراز یا باید دو مجموعهٔ یک عضوی باشد یا یک مجموعهٔ دو عضوی. همچنین می‌دانیم به $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ صورت می‌توان یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ ۵ عضوی انتخاب کرد. یکی از این زیرمجموعه‌ها مانند $\{۲,۴,۵\}$ را انتخاب می‌کنیم. با این زیرمجموعه، دو افراز متمایز $[\{۲,۴,۵\},\{۱,۳\}]$ و $[\{۲,۴,۵\},\{۱\},\{۳\}]$ وجود دارد. به طریق مشابه با هر کدام از ۹ زیرمجموعه دیگر نیز می‌توان دو افراز دیگر نوشت. بنابراین به تعداد $۱۰ \times ۲ = ۲۰$ افراز متفاوت وجود دارد که در آن‌ها یک مجموعهٔ ۳ عضوی وجود داشته باشد.

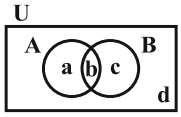
۶۳- گزینهٔ «۲»

تمام اعضای مجموعهٔ A، اعداد طبیعی فرد هستند و در نتیجه اعضای مجموعهٔ B، اعداد طبیعی زوج خواهند بود. بنابراین $A \cap B = \varnothing$. از طرفی $C \subseteq A \cap B$، پس C فقط می‌تواند مجموعهٔ $\varnothing$ باشد، یعنی تنها یک مجموعه برای C پیدا می‌شود.

۶۴- گزینهٔ «۳»

دو زیر مجموعهٔ B و A را به‌صورت زیر با نمودار ون نمایش می‌دهیم:

حال قسمت‌های مختلف نمودار را شماره‌گذاری می‌کنیم:



برای اینکه $A \cap B = \varnothing$ شود، نباید اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ در ناحیهٔ وسط یعنی ناحیهٔ b قرار گیرند، چون A و B در این ناحیه اشتراک دارند. بنابراین هر عضو، دارای ۳ مکان (a، c یا d) برای قرار گرفتن است، یعنی داریم:

تعداد کل حالات: $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۸۱$

۶۵- گزینهٔ «۴»

در این‌جا چند حالت داریم:

حالت اول: دو مجموعهٔ سه عضوی $\xleftarrow{\text{تعداد حالات}} \frac{۶!}{۳!۳!۲!} = ۱۰$

حالت دوم: شش مجموعهٔ یک عضوی $\xleftarrow{\text{تعداد حالات}} \frac{۶!}{(۱!)^۶ ۶!} = ۱$

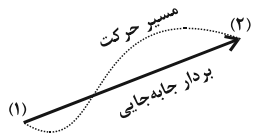
حالت سوم: سه مجموعهٔ دو عضوی $\xleftarrow{\text{تعداد حالات}} \frac{۶!}{۲!۲!۲!۳!} = ۱۵$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر ۲۶ است.

فیزیک ۳

۶۶- گزینهٔ «۴»

بردار جابه‌جایی، پاره‌خط جهت‌داری است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند. این بردار اطلاعاتی راجع به مسیر حرکت به ما نمی‌دهد.



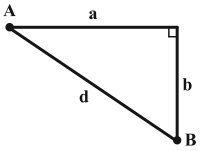
مسافت طی شده، طول مسیر حرکت از مکان آغازین حرکت تا مکان پایانی حرکت است.

مسافت طی شده کمیتی نرده‌ای است و هیچ‌گونه اطلاعاتی راجع به جهت حرکت به ما نمی‌دهد.

با این توضیحات، تنها گزینهٔ «۴» صحیح است.

۶۷- گزینهٔ «۲»

مسافت طی شده توسط متحرک در جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B برابر است با: $\ell = a + b$



جابه‌جایی متحرک طی این مسیر برابر است با: $d=\sqrt{a^2+b^2}$

بنابراین داریم:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\left(\frac{\ell}{d}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2}=1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\quad(1)$$

از طرفی داریم:

$$(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$$

$$\Rightarrow\frac{2ab}{a^2+b^2}\le 1\quad(2)$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(1),(2)}\left(\frac{\ell}{d}\right)^2=1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\le 2\Rightarrow\frac{\ell}{d}\le\sqrt{2}$$

۶۸– گزینهٔ «۴»

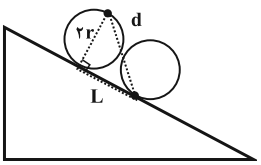
با توجه به این‌که تندی متوسط اتومبیل را پس از طی مسافت $455km$ می‌دانیم، می‌توانیم زمان کل حرکت را محاسبه کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow 35=\frac{455}{t}\Rightarrow t=13h$$

نیمهٔ اول زمانی حرکت یعنی ۶/۵ ساعت ابتدایی حرکت و چون ما اطلاعات کافی راجع به حرکت اتومبیل طی این مدت نداریم، نمی‌توان تندی متوسط آن‌را حساب کرد.

۶۹– گزینهٔ «۱»

هنگامی‌که چرخ به اندازهٔ نیم‌دور می‌چرخد، سنگ به‌اندازهٔ $d=v_{av}t$ جابه‌جا شده است. مطابق شکل داریم:



$$d=v_{av}t=4\sqrt{13}\times 0/5=2\sqrt{13}m$$

$$L=\frac{2\pi r}{2}=\pi r$$

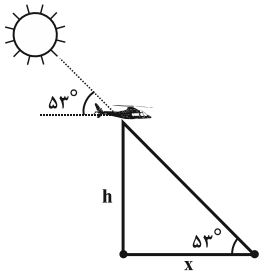
$$d=\sqrt{(2r)^2+(L)^2}=\sqrt{(2r)^2+(\pi r)^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{13}=\sqrt{4r^2+\pi^2r^2}\Rightarrow 2\sqrt{13}=\sqrt{r^2(4+\pi^2)}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{13}=r\sqrt{13}\Rightarrow r=2m$$

۷۰– گزینهٔ «۳»

با توجه به حرکت عمودی پهپاد و حرکت افقی سایه بر روی سطح زمین می‌توانیم از مفهوم $\tan\alpha$ برای حل این مسئله کمک بگیریم:



$$h=v_{av}\Delta t=5\times 4=20m$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}\Rightarrow\tan 53^\circ=\frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{h}{\tan 53^\circ}=\frac{20}{\frac{4}{3}}=15m$$

بنابراین: $(v_{av})_{\text{سایه}}=\frac{x}{\Delta t}=\frac{15}{4}=3/75\frac{m}{s}$

۷۱– گزینهٔ «۴»

در حرکت با سرعت ثابت، جابه‌جایی متناسب با زمان است.

$$x=v\Delta t+x_0\Rightarrow\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=3s$ تا $t_2=8s$ برابر با $|\Delta x|=|-14-5|=19m$ است، بنابراین در هر بازهٔ زمانی ۵ ثانیه‌ای دیگر نیز اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر با $19m$ خواهد بود.

۷۲– گزینهٔ «۳»

مساحت زیر نمودار سرعت – زمان بیانگر جابه‌جایی متحرک است. با توجه به شکل، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، داریم:

$$\Delta x_A>\Delta x_B>\Delta x_C$$

از طرفی با توجه به تعریف سرعت متوسط، داریم:

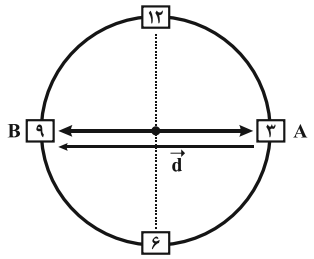
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow(v_{av})_A>(v_{av})_B>(v_{av})_C$$

شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار سرعت – زمان، شتاب متوسط متحرک بین آن دو نقطه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، بین دو لحظهٔ t_1 و t_2، شیب خط واصل برای هر سه نمودار یکسان است و بنابراین داریم:

$$(a_{av})_A=(a_{av})_B=(a_{av})_C$$

۷۳– گزینهٔ «۴»

با توجه به شکل زیر، در بازهٔ زمانی $3:15'$ تا $3:45'$ نوک عقربه در مدت $\Delta t = 30min$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. در این مدت جابه‌جایی نوک عقربه برابر با $d = 10cm$ است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط به‌صورت زیر اندازهٔ آن‌را حساب می‌کنیم:



$$|\vec{d}| = d = 10cm = 0/1m$$

$$\Delta t = 30min = \frac{1}{2}h$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{0/1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow v_{av} = 0/2\frac{m}{h}$$

۷۴– گزینهٔ «۲»

گزینهٔ «۱» نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی 3s تا 10s در جهت مثبت محور x و در بازهٔ زمانی 14s تا 18s در جهت منفی محور حرکت می‌کند. بنابراین در لحظهٔ 8s رو به سوی مثبت و در لحظهٔ 16s رو به سوی منفی در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ «۲» درست است. متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا 3s و 14s تا 18s و در مجموع به مدت 7s در خلاف جهت محور x حرکت نموده است.

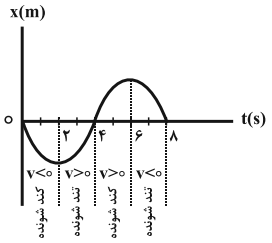
گزینهٔ «۳» نادرست است. در بازهٔ زمانی 10s تا 14s و به مدت ۴ ثانیه متحرک ساکن و در نتیجه سرعت آن صفر بوده است.

گزینهٔ «۴» نادرست است. تندی متوسط برابر مسافت طی شده تقسیم بر بازهٔ زمانی است. چون برای جسم در حال حرکت، هیچ وقت مسافت طی شده صفر نمی‌شود، لذا تندی متوسط نیز صفر نخواهد شد.

دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۶ ثانیه چون جابه‌جایی متحرک صفر می‌باشد، سرعت متوسط آن صفر خواهد شد.

۷۵– گزینهٔ «۱»

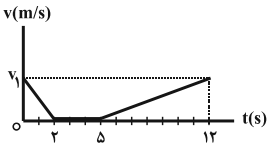
می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان معرف سرعت است. بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا 2s و 6s تا 8s، چون شیب خط مماس بر نمودار منفی است، در این بازه‌های زمانی سرعت نیز منفی است. از طرف دیگر، می‌دانیم در حرکت کندشونده اندازهٔ سرعت رو به کاهش است. بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا 2s و 4s تا 6s که اندازهٔ شیب خط مماس کاهش می‌یابد، اندازهٔ سرعت نیز کاهش یافته و حرکت شتاب‌دار کندشونده است. در این صورت می‌توان گفت در بازهٔ زمانی صفر تا 2s هم سرعت منفی است و هم حرکت شتابدار کندشونده می‌باشد.



دقت کنید، در بازهٔ زمانی 4s تا 6s حرکت شتاب‌دار کندشونده است، اما سرعت مثبت می‌باشد.

۷۶– گزینهٔ «۱»

با توجه به نمودار زیر، چون سرعت متحرک همواره نامنفی بوده، بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت برابر با جابه‌جایی آن است. جابه‌جایی نیز برابر با مساحت زیر منحنی سرعت – زمان است. پس:



$$d_{max} = \Delta x_{(0 \text{ تا } 12s)} = \Delta x_{(0 \text{ تا } 2s)} + \Delta x_{(2s \text{ تا } 5s)} + \Delta x_{(5s \text{ تا } 12s)}$$

$$\Rightarrow 63 = \left(\frac{1}{2} \times v_1 \times 2\right) + 0 + \left(\frac{1}{2} \times v_1 \times 7\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{63}{4/5} = 14\frac{m}{s}$$

حال می‌توان مسافت طی شده در مرحلهٔ تندشونده (یعنی از لحظهٔ 5s تا 12s) را با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار به‌دست آورد:

$$d_{(5s \text{ تا } 12s)} = \frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49m$$

۷۷– گزینهٔ «۲»

چون شتاب حرکت جسم ثابت است، ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی شده برابر با جابه‌جایی است.

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \xrightarrow[\Delta t = 4s]{\Delta x = 28m, v = 11\frac{m}{s}} 28 = \frac{11 + v_0}{2} \times 4$$

$$\Rightarrow v_0 = 3\frac{m}{s}$$

اکنون، با استفاده از معادلهٔ سرعت می‌توان شتاب متحرک را به‌دست آورد.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 3\frac{m}{s}]{v = 11\frac{m}{s}, t = 4s} 11 = a \times 4 + 3$$

$$\Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

۷۸– گزینهٔ «۳»

طبق نمودار زمانی‌که متحرک در مکان $x=-9m$ قرار دارد، سرعت آن برابر با صفر است. باتوجه به معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی داریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x_1 \xrightarrow[\Delta x_1=27-(-9)=36m]{v_1=0,\,v_2=+12\frac{m}{s}} 144-0=2a\times 36$$

$$\Rightarrow a=2\frac{m}{s^2}$$

حال با استفادهٔ دوباره از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، داریم:

$$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x_2 \xrightarrow[\Delta x_2=-9-0=-9m]{v_1=0,\,v_0=?,\,a=+2\frac{m}{s^2}} 0-v_0^2=2\times 2\times(-9)$$

$$\Rightarrow v_0=-6\frac{m}{s}$$

۷۹– گزینهٔ «۴»

برای محاسبهٔ مسافت طی شده باید تعیین کنیم که آیا در بازهٔ زمانی مشخص شده، جسم تغییر جهت می‌دهد و یا خیر. برای این کار، معادلهٔ سرعت – زمان را به‌دست آورده و آن‌را تعیین علامت می‌کنیم. در لحظه‌ای که سرعت جسم صفر می‌شود و علامت آن عوض می‌شود، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

$$\left.\begin{array}{l} x=-t^2+4t-4 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2},\,v_0=4\frac{m}{s},\,x_0=-4m$$

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-2t+4=0 \Rightarrow t=2s$$

t(s)		2	
v	+	0	–

بنابراین در لحظهٔ $t=2s$ جسم تغییر جهت می‌دهد. برای محاسبهٔ مسافت طی شده داریم:

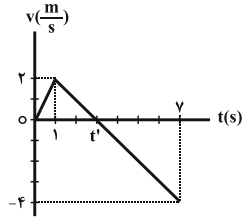
$$t_0=0 \Rightarrow x_0=-4m$$

$$t_1=2s \Rightarrow x_1=-2^2+4\times 2-4 \Rightarrow x_1=0$$

$$t_2=4s \Rightarrow x_2=-4^2+4\times 4-4 \Rightarrow x_2=-4m$$

$$d=|x_1-x_0|+|x_2-x_1|=|0-(-4)|+|-4-0|=8m$$

۸۰– گزینهٔ «۱»



زمانی که تندی متحرک در حال کاهش است، حرکت متحرک کندشونده است. بنابراین مطابق نمودار از لحظهٔ $t=1s$ تا t'، حرکت متحرک کندشونده است. برای محاسبهٔ t' با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{2}{t'-1}=\frac{4}{7-t'} \Rightarrow t'=3s$$

در بازهٔ $t=1s$ تا $t'=3s$ یعنی به‌مدت $2s$ حرکت متحرک کندشونده است.

۸۱– گزینهٔ «۲»

برای نوشتن معادلهٔ مکان – زمان، بنا به رابطهٔ $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$، باید a، v_0 و x_0 مشخص باشند، بنابراین چون v، v_0، x_0 و x مشخص‌اند، ابتدا با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم. دقت کنید، در لحظهٔ $t=0$، سرعت جسم برابر با v_0 می‌باشد.

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \xrightarrow[x=16m,\,x_0=12m]{v=3\frac{m}{s},\,v_0=5\frac{m}{s}} 9-25=2a(16-12)$$

$$\Rightarrow -16=2a\times 4 \Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

اکنون می‌توان معادلهٔ مکان – زمان را نوشت:

$$x_0=12m\ ,\ a=-2\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0=5\frac{m}{s}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)t^2+5t+12$$

$$\Rightarrow x=-t^2+5t+12$$

۸۲– گزینهٔ «۲»

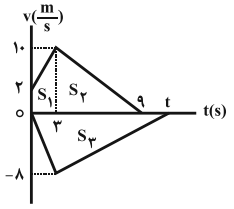
می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور t برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین کافی است مساحت سطح محصور بین هر کدام از نمودارها را حساب نموده و مساوی هم قرار دهیم. دقت کنید، چون تا لحظهٔ توقف، علامت سرعت متحرک‌ها تغییر نکرده است $(v_A>0)$ و $(v_B<0)$، متحرک‌ها تغییر جهت نداده‌اند، لذا جابه‌جایی و مسافت طی شدهٔ آنها با هم برابر است.

$$\Delta x_A=S_1+S_2=\left(\frac{2+10}{2}\times 3\right)+\left(\frac{6\times 10}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x_A=18+30=48m$$

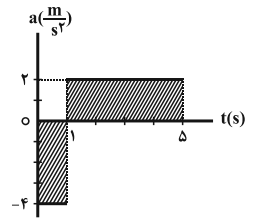
$$\Delta x_B=|S_3|=\left|\frac{-8\times t}{2}\right| \Rightarrow \Delta x_B=4t$$

$$\Delta x_A=\Delta x_B \Rightarrow 48=4t \Rightarrow t=12s$$



با توجه به شکل، متحرک A در لحظهٔ $t=9s$ و متحرک B در لحظهٔ $t=12s$ متوقف می‌شود. بنابراین متحرک B به‌مدت $\Delta t=12-9=3s$ بعد از متحرک A متوقف می‌گردد.

۸۳– گزینهٔ «۳»



$$v(t=0)=+6\frac{m}{s},\Delta v(t=0 \text{ تا } t=1s)=-1\times 4=-4\frac{m}{s}$$

$$v(t=1s)=6-4=2\frac{m}{s}$$

$$v(t=1s)=2\frac{m}{s},\Delta v(t=1s \text{ تا } t=5s)=2\times 4=8\frac{m}{s}$$

$$v(t=5s)=2+8=10\frac{m}{s}$$

- متحرک در لحظهٔ $t=0$ با سرعت $6\frac{m}{s}$ در جهت محور x از مبدأ مکان عبور کرده و تا لحظهٔ $t=1s$ سرعتش به $2\frac{m}{s}$ کاهش یافته است (حرکت کندشونده) سپس با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ سرعتش افزایش یافته و به $+10\frac{m}{s}$ رسیده است. (حرکت تندشونده)

- سرعت متحرک به صفر نرسیده و تغییر علامت نداده است، پس تغییر جهت نداریم.

- محاسبه جابه‌جایی توسط رابطهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\times\Delta t$$

$$\Delta x_1(t=0 \text{ تا } t=1s)=\frac{6+2}{2}\times 1=4m$$

$$\Delta x_2(t=1s \text{ تا } t=5s)=\frac{2+10}{2}\times 4=24m$$

$$\Delta x_T=\Delta x_1+\Delta x_2=4+24=28m$$

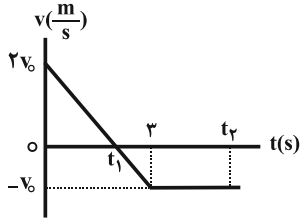
۸۴– گزینهٔ «۳»

متحرک در لحظهٔ $t=0$ از مبدأ مکان عبور کرده است، بنابراین در لحظه‌ای که دوباره از مبدأ مکان عبور می‌کند، جابه‌جایی آن برابر با صفر می‌شود. از طرفی می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است. بنابراین ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را می‌یابیم. داریم:

$$\frac{2v_0}{v_0}=\frac{t_1}{3-t_1}\Rightarrow t_1=2s$$

از لحظهٔ صفر تا $t=2s$، نمودار سرعت - زمان بالای محور زمان است و بنابراین جابه‌جایی آن مثبت است. داریم:

$$S_1=\frac{2\times 2v_0}{2}=2v_0$$



از لحظهٔ $t_1=2s$ به بعد، نمودار سرعت – زمان زیر محور زمان است و بنابراین جابه‌جایی آن منفی است. اگر فرض کنیم متحرک در لحظهٔ t_2 به مبدأ مکان باز می‌گردد، داریم:

$$|S_2|=\frac{(t_2-t_1)+(t_2-3)}{2}\times v_0$$

$$\xrightarrow{t_1=2s}|S_2|=\frac{(t_2-2)+(t_2-3)}{2}\times v_0=\frac{2t_2-5}{2}v_0$$

در نتیجه داریم:

$$S_1=|S_2|\Rightarrow 2v_0=\frac{2t_2-5}{2}v_0\Rightarrow t_2=4/5s$$

۸۵– گزینهٔ «۲»

چون نمودار سرعت – زمان هر دو متحرک به‌صورت خط راستی با شیب غیرصفر است، بنابراین شتاب حرکت متحرک‌های A و B ثابت است و بنابراین معادلهٔ سرعت – زمان آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$v_A=a_At+v_{0_A}=3t+0\Rightarrow v_A=3t$$

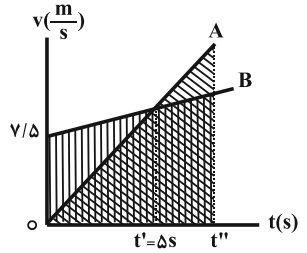
$$v_B=a_Bt+v_{0_B}=1/5t+7/5\Rightarrow v_B=1/5t+7/5$$

در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر می‌شود، داریم:

$$v_A=v_B\Rightarrow 3t'=1/5t'+7/5\Rightarrow t'=5s$$

برای به‌دست آوردن لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، چون مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است و این دو متحرک بدون تغییر جهت حرکت می‌کنند، داریم:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow\frac{t''\times 3t''}{2}=\frac{7/5+(1/5t''+7/5)}{2}t''\Rightarrow t''=10s$$



به عنوان تمرین، با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک A و B، لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند را محاسبه کنید.

فیزیک ۱

۸۶- گزینهٔ «۳»

شیشه یک جامد بی‌شکل است.

گزینهٔ «۱» درست: در جامدات (از جمله شیشه)، ذرات به سبب نیروهای الکتریکی وارد بر یکدیگر در کنار هم می‌مانند.

گزینهٔ «۲» درست: جامدات آمورف (یا بی‌شکل) از سردسازی سریع حالت مایع آن به‌دست می‌آیند.

گزینهٔ «۳» نادرست: در جامدات، ذرات سازنده، در فواصل معین و تقریباً ثابتی نسبت به یکدیگر قرار گرفته‌اند و در این مکان‌ها حرکت‌های ارتعاشی انجام می‌دهند.

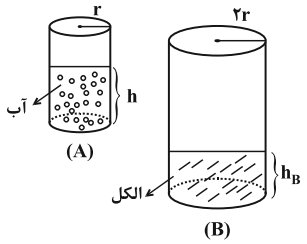
گزینهٔ «۴» درست: مولکول‌های یک مادهٔ جامد، مثل گلوله‌هایی هستند که با یک سری فنر به یکدیگر متصل شده‌اند. زمانی که آن‌ها را از وضع تعادل خود دورتر یا نزدیک‌تر کنیم، نیروهایی بین آنها ایجاد شده که می‌خواهند آن‌ها را مجدداً به وضعیت تعادل خود باز گردانند.

۸۷- گزینهٔ «۱»

نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه است، بنابراین سطح جیوه در لولهٔ مویین پایین‌تر از سطح آزاد جیوه در ظرف قرار می‌گیرد.

۸۸- گزینهٔ «۴»

مطابق شکل زیر، ابتدا باید حساب کنیم ارتفاع الکل در ظرف B چند برابر ارتفاع آب در ظرف A می‌باشد. برای این کار داریم:



$$V_A = V_B \Rightarrow \pi r_A^2 h_A = \pi r_B^2 h_B \xrightarrow{r_B = 2r_A}$$

$$r_A^2 h_A = 4 r_A^2 h_B \Rightarrow h_B = \frac{h_A}{4}$$

از طرفی فشار ناشی از مایعات در کف ظرف از رابطهٔ $P = \rho g h$ محاسبه می‌شود. داریم:

$$P = \rho g h \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{0/8} \times 4 = 5$$

۸۹- گزینهٔ «۳»

فشار وارد بر سطح مقطع لولهٔ باریک برابر است با:

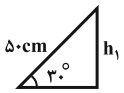
$$\Delta P_1 = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow \Delta P_1 = \frac{20}{A_1}$$

طبق اصل پاسکال این فشار به کف ظرف منتقل می‌شود، بنابراین افزایش نیروی وارد بر کف ظرف برابر است با:

$$\Delta F_2 = \Delta P_1 A_2 \Rightarrow \Delta F_2 = \frac{20}{A_1} \times A_2 = \frac{20}{A_1} \times 10 A_1 \Rightarrow \Delta F_2 = 200N$$

۹۰- گزینهٔ «۱»

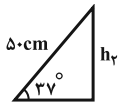
در حالت اول ارتفاع عمودی لوله را چنین می‌توان به‌دست آورد:



$$\sin 30^\circ = \frac{h_1}{50} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_1}{50} \Rightarrow h_1 = 25cm$$

چون فشار هوا $75cmHg$ است پس فشاری به اندازهٔ $75 - 25 = 50cmHg$ از طرف جیوه بر انتهای بستهٔ لوله در حالت اول وارد می‌شود.

در حالت دوم، زاویهٔ سطح جیوه و لوله به 37° می‌رسد، پس می‌توان نوشت:



$$\sin 37^\circ = \frac{h_2}{50} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{h_2}{50} \Rightarrow h_2 = 30cm$$

بنابراین در این حالت، فشاری معادل $75 - 30 = 45cmHg$ از طرف جیوه بر انتهای بستهٔ لوله وارد می‌شود.

پس چون فشار وارده کاهش یافته، نیروی وارده نیز کاهش می‌یابد. اگر اندازهٔ کاهش فشار را با $|\Delta P|$ نمایش دهیم، داریم:

$$|\Delta P| = 5cmHg$$

$$|\Delta P| = (\rho g h)_{\text{جیوه}} = 13/6 \times 10^3 \times 10 \times 5 \times 10^{-2} = 6800Pa$$

$$|\Delta F| = |\Delta P| . A = 6800 \times 10 \times 10^{-4} = 6/8N$$

۹۱- گزینهٔ «۱»

نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از فشار کل وارد بر کف ظرف است. بنابراین داریم:

$$F = PA \Rightarrow 340 = P \times 100 \times 10^{-4} \Rightarrow P_{\text{کل}} = 34000Pa$$

حال فشار بر حسب سانتی‌متر جیوه را به‌دست می‌آوریم:

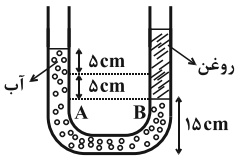
$$P_{\text{کل}} = \rho_{Hg} g h_{Hg} \Rightarrow 34000 = 13600 \times 10 \times h_{Hg}$$

$$\Rightarrow h_{Hg} = 0/25m = 25cm$$

$$P_{\text{کل}} = P_{\text{گاز}} + P_{\text{مایع}} \Rightarrow 25 = P_{\text{گاز}} + (12 + 8) \Rightarrow P_{\text{گاز}} = 5cmHg$$

۹۲- گزینهٔ «۱»

پس از ریختن روغن در شاخهٔ سمت راست شکل به‌صورت زیر در می‌آید. نقاط A و B نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن هستند، پس هم‌فشارند.



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow ۱\times۱۰ = ۰/۸\times h_{\text{روغن}} \Rightarrow h_{\text{روغن}} = ۱۲/۵cm$$

فاصله سطح بالایی روغن تا پایین برابر خواهد شد با:

$$۱۲/۵ + ۱۵ = ۲۷/۵cm$$

۹۳- گزینهٔ «۴»

چون پیستون‌ها در یک تراز افقی قرار دارند، می‌توان نوشت:

$$\frac{F_۱}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲} \xrightarrow{F_۱=f, F_۲=mg} mg = \frac{A_۲}{A_۱}\times f \qquad (۱)$$

در حالت دوم که نیروی f، ده درصد افزایش می‌یابد، داریم:

$$f' = f + \frac{۱۰}{۱۰۰}f = ۱/۱f$$

چون در حالت دوم هم پیستون‌ها هم‌تراز هستند، داریم:

$$\frac{F'_۱}{A_۱} = \frac{F'_۲}{A_۲} \xrightarrow{F'_۱=۱/۱f, F'_۲=m'g} m'g = \frac{A_۲}{A_۱}\times(۱/۱)f \qquad (۲)$$

با تقسیم رابطه (۲) به (۱) داریم:

$$\frac{m'g}{mg} = \frac{\frac{A_۲}{A_۱}\times ۱/۱f}{\frac{A_۲}{A_۱}\times f} = ۱/۱ \Rightarrow m'g = ۱/۱mg \Rightarrow m' = ۱/۱m$$

$$\Rightarrow m' = ۱/۱\times۲۰ = ۲۲kg$$

پس مقدار افزایش جرم (یا جرم وزنه‌ای که باید روی m قرار دهیم) برابر است با:

$$m' - m = ۲۲ - ۲۰ = ۲kg$$

۹۴- گزینهٔ «۳»

در حالت اول، نیروسنج وزن جسم و در حالت دوم وزن جسم غوطه‌ور در مایع را نشان می‌دهد. طبق اصل ارشمیدس، مایع نیرویی بالاسو به جسم وارد کرده است که اندازهٔ آن با وزن شارهٔ جابه‌جا شده برابر است، بنابراین داریم:

وزن شارهٔ جابه‌جا شده: $W' = ۲۲/۱۲۸ - ۲۱/۸۷۲ = ۰/۲۵۶N$

جرم شارهٔ جابه‌جا شده: $m = \frac{W'}{g} = \frac{۰/۲۵۶}{۱۰} = ۲۵۶\times۱۰^{-۴}kg = ۲۵/۶g$

حال چگالی مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۲۵/۶}{۳۲} = ۰/۸\frac{g}{cm^۳}$$

۹۵- گزینهٔ «۳»

با استفاده از تعریف آهنگ جریان شاره، داریم:

$$\text{آهنگ جریان شاره} = \frac{\text{حجم شاره}}{\text{زمان}} = Av$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^۲ h}{t} = Av \Rightarrow \frac{۳\times\left(\frac{۱/۵}{۲}\right)^۲\times۴}{t} = ۴۵\times۱۰^{-۴}\times۰/۵$$

$$\Rightarrow t = ۳۰۰۰s = ۵۰min$$

فیزیک ۲

۹۶- گزینهٔ «۴»

با دو برابر کردن فاصلهٔ بین دو صفحهٔ یک خازن تخت، طبق رابطهٔ $C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d}$، ظرفیت آن نصف می‌شود. بنابراین داریم:

$$Q_۲ - Q_۱ = -۳\mu C$$

$$\Rightarrow C_۲V - C_۱V = -۳\mu C \xrightarrow{C_۲=\frac{C_۱}{۲}} \frac{C_۱}{۲}V - C_۱V = -۳\mu C$$

$$\Rightarrow C_۱V = ۶\mu C \xrightarrow{V=۲۰V} C_۱ = ۰/۳\mu F$$

۹۷- گزینهٔ «۲»

ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{۹۶}{۴} \Rightarrow V = ۲۴V$$

با توجه به این‌که میدان الکتریکی داخل خازن یکنواخت است، می‌توان نوشت:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_+ - V_-}{d} = \frac{V_B - V_A}{d - \frac{d}{۳} - \frac{d}{۴}} \Rightarrow \frac{۲۴}{d} = \frac{V_B - V_A}{\frac{۵}{۱۲}d}$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = ۱۰V$$

۹۸- گزینهٔ «۲»

ابتدا رابطهٔ بین میدان الکتریکی و چگالی سطحی بار الکتریکی را با استفاده از رابطه‌های $Q = CV$، $\sigma = \frac{Q}{A}$، $C = \varepsilon_۰\frac{A}{d}$ و $E = \frac{V}{d}$ به‌دست می‌آوریم:

$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow{V=\frac{Q}{C}} E = \frac{Q}{Cd} \xrightarrow[Q=\sigma A]{C=\varepsilon_۰\frac{A}{d}} E = \frac{\sigma A}{\varepsilon_۰\frac{A}{d}\times d}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰} \xrightarrow[\varepsilon_۰=۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{F}{m}]{\sigma=۹\times۱۰^{-۶}\frac{C}{m^۲}} E = \frac{۹\times۱۰^{-۶}}{۹\times۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow E = ۱۰^۶\frac{N}{C}$$

۹۹- گزینهٔ «۳»

ظرفیت خازن تغییری نمی‌کند و چون اختلاف پتانسیل دو سر خازن افزایش یافته است، بنابراین بار الکتریکی ذخیره شده در آن نیز افزایش می‌یابد. داریم:

$$C=\frac{Q}{V}\Rightarrow\frac{Q_1}{V_1}=\frac{Q_2}{V_2}\Rightarrow\frac{Q_1}{V_1}=\frac{Q_1+30}{V_1+7/5}$$

$$\Rightarrow Q_1V_1+7/5Q_1=Q_1V_1+30V_1\Rightarrow\frac{Q_1}{V_1}=4\Rightarrow C=4\mu F$$

از طرف دیگر داریم:

$$U_2=U_1+187/5\Rightarrow\frac{Q_2^2}{2C}=\frac{Q_1^2}{2C}+187/5$$

$$\Rightarrow\frac{Q_2^2}{2\times4}=\frac{(Q_2-30)^2}{2\times4}+187/5\Rightarrow Q_2=40\mu C$$

۱۰۰- گزینهٔ «۱»

ابتدا انرژی و بار خازن را در حالت اول (قبل از جدا کردن از مولد) حساب می‌کنیم:

$$Q_1=CV\xrightarrow[V=10V]{C=6\mu F}Q_1=6\times10=60\mu C$$

$$U_1=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\times6\times100\Rightarrow U_1=300\mu J$$

وقتی خازن از مولد جدا شود، بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند. بنابراین در حالت دوم بار خازن $Q_2=60\mu C$ است. در این حالت کافی است ظرفیت خازن را با وارد کردن دی‌الکتریک حساب کنیم و از رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$ انرژی خازن را به‌دست آوریم و تغییر آن‌را تعیین نماییم.

$$C=\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}\xrightarrow[d=\text{ثابت}]{A=\text{ثابت}}\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\xrightarrow[\kappa_1=1]{\kappa_2=2,C_1=6\mu F}\frac{C_2}{6}=\frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow C_2=12\mu F$$

$$U_2=\frac{Q_2^2}{2C_2}=\frac{60\times60}{2\times12}\Rightarrow U_2=150\mu J$$

می‌بینیم انرژی خازن از $U_1=300\mu J$ به $U_2=150\mu J$ تغییر کرده است. بنابراین انرژی خازن $150\mu J$ کم‌تر شده است.

$$\Delta U=150-300\Rightarrow\Delta U=-150\mu J$$

۱۰۱- گزینهٔ «۴»

در یک سیم که اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است، الکترون‌های آزاد با تندی‌هایی از مرتبهٔ $10^6\frac{m}{s}$ در حرکتند و زمانی‌که به دو سر سیم اختلاف پتانسیل اعمال می‌کنیم، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را کمی تغییر می‌دهند و با سرعتی متوسط به نام سرعت سوق که بزرگی آن از مرتبهٔ $1\frac{mm}{s}$ است در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند، بنابراین:

$$\frac{10^6\frac{m}{s}}{1\frac{mm}{s}}=10^6\frac{m}{mm}=10^6\times10^3\frac{mm}{mm}=10^9$$

۱۰۲- گزینهٔ «۴»

طبق رابطهٔ $\Delta q=I\Delta t$، اگر جریان بر حسب میلی‌آمپر و زمان بر حسب ساعت باشد، بار الکتریکی بر حسب mAh خواهد بود. داریم:

$$\Delta q=I\Delta t\Rightarrow4\times10^3=5\times10^4\times10^{-3}\Delta t\Rightarrow\Delta t=80h$$

$$\Rightarrow\Delta t=80\times60=4800min$$

بار الکتریکی شارش شده در مدار برابر با بار الکتریکی ذخیره شده در باتری است. داریم:

$$\Delta q=4000mAh=4000\times10^{-3}(A)\times3600(s)=14/4\times10^3As$$

$$\Rightarrow\Delta q=14/4\times10^3C\Rightarrow\Delta q=14/4\times10^9\mu C$$

۱۰۳- گزینهٔ «۲»

با استفاده از رابطهٔ تغییرات مقاومت الکتریکی یک سیم با تغییرات دمای آن، داریم:

$$T_1=273K\ ,\ T_2=100^\circ C=373K$$

$$\rho=\rho_0[1+\alpha\Delta T]\xrightarrow{R=\rho\frac{L}{A}}R=R_0[1+\alpha\Delta T]$$

$$\Rightarrow\frac{R}{R_0}=1+\alpha\Delta T=1+4/3\times10^{-3}\times(373-273)=1/43$$

۱۰۴- گزینهٔ «۳»

چون مقاومت ترکیبی نوار چهارم را ندارد، بنابراین تلرانس آن ۲۰ درصد است. برای خواندن حلقه‌های رنگی، مقاومت را طوری در دست می‌گیریم که نوار چهارم و یا محل آن در سمت راست قرار گیرد. داریم:

$$R=\overline{ab}\times10^n=25\times10^3\Omega=25k\Omega$$

$$\text{تلرانس}=0/2\times25=5k\Omega$$

$$\Rightarrow20k\Omega\le R\le30k\Omega$$

۱۰۵– گزینهٔ «۲»

در مقاومت‌های نوری (LDR)، مقاومت الکتریکی به نور تابیده شده به آن بستگی دارد، به‌طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود. در مقاومت‌های نوری که از جنس نیم‌رسانای خالص هستند، با افزایش شدت نور بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی افزوده می‌شود و در نتیجه از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود.

شیمی ۳

۱۰۶– گزینهٔ «۲»

تعداد مول اتم‌های موجود در یک گرم اتیلن گلیکول با فرمول $C_2H_6O_2$، بیشتر از اوره با فرمول $CO(NH_2)_2$ است.

$$1gC_2H_6O_2 \times \frac{1mol}{62g} \times \frac{10 mol atom}{1mol} = \frac{10}{62} \simeq 0/16 mol atom$$

$$1gCO(NH_2)_2 \times \frac{1mol}{60g} \times \frac{8 mol atom}{1mol} = \frac{8}{60} \simeq 0/13 mol atom$$

۱۰۷– گزینهٔ «۳»

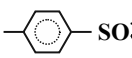
عبارت‌های الف، ب و پ درست هستند.

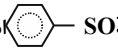
امید به زندگی در مناطق توسعه‌یافته و برخوردار، بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

۱۰۸– گزینهٔ «۱»

پاک‌کننده‌های صابونی بر خلاف پاک‌کننده‌های غیر صابونی، ترکیباتی غیرآروماتیک هستند و در آب‌های سخت خاصیت پاک‌کنندگی خود را از دست می‌دهند. ساختار آن‌ها با فرض این که بخش کاتیونی هر دو پاک‌کننده، یون سدیم باشد، به صورت زیر است:

پاک‌کننده‌های صابونی: $C_nH_{2n+1}COO^-Na^+$

پاک‌کننده‌های غیر صابونی: C_nH_{2n+1}  $SO_3^-Na^+$

با فرض برابر بودن تعداد اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی (C_nH_{2n+1})، اختلاف جرم مولی آن‌ها به اندازهٔ اختلاف جرم مولی COO^- و  SO_3^- است که بیشتر از ۳۶ گرم بر مول می‌باشد.

۱۰۹– گزینهٔ «۱»

منظور از ترکیبی با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$، روغن زیتون است که از جمله موادی است که می‌تواند در واکنش با سدیم هیدروکسید، صابون جامد را تولید کند.

۱۱۰– گزینهٔ «۱»

فقط عبارت «الف» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «ب»: صابون‌ها در آب حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم نسبت به آب مقطر کمتر کف کرده و قدرت پاک‌کنندگی آنها کاهش می‌یابد.

عبارت «پ»: رسوب ایجاد شده $(RCOO)_2Mg$ می‌باشد.

عبارت «ت»: با توجه به اینکه میزان منیزیم و کلسیم موجود در آب دریا مشخص نیست و دما نیز یکسان نمی‌باشد، نمی‌توان مقایسهٔ دقیقی بین آن دو انجام داد.

۱۱۱– گزینهٔ «۳»

افزایش SO_3 و CO_2 به آب باعث افزایش یون هیدرونیوم و تشکیل سولفوریک اسید و کربنیک اسید می‌شود.

۱۱۲– گزینهٔ «۳»

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq) \qquad [H^+] = [F^-]$$

$$K = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]} \Rightarrow 5\times10^{-7} = \frac{[H^+][F^-]}{0/5}$$

$$\Rightarrow 5\times10^{-7} = \frac{[H^+]^2}{0/5} \Rightarrow [H^+]^2 = 5\times10^{-7}\times0/5$$

$$\Rightarrow [H^+] = 5\times10^{-4}\frac{mol}{L}$$

۱۱۳– گزینهٔ «۲»

شکل (۱) انحلال اکسیدی نافلزی در آب است که باعث می‌شود محیط آب اسیدی شود.

شکل (۲) محلولی از الکترولیت قوی است، اما HF یک اسید ضعیف است و رسانایی الکتریکی کمی دارد.

۱۱۴– گزینهٔ «۳»

به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند؛ بنابراین استفاده از لفظ یونش برای ترکیب یونی منیزیم هیدروکسید اشتباه است.

۱۱۵- گزینهٔ «۳»

HF اسیدی ضعیف است که در آب، هم به‌صورت یونی و هم به‌صورت مولکولی حل می‌شود. با فرض اینکه تعداد x مولکول HF به‌صورت یونی در آب حل شود، داریم:

$$HF\begin{cases} \xrightarrow[x]{\text{یونی}} \underset{x}{H^+}(aq) + \underset{x}{F^-}(aq) \\ \xrightarrow[200-x]{\text{مولکولی}} \underset{200-x}{HF}(aq) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 200 - x + x + x = 260 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow \alpha = \frac{60}{200} = 0/3$$

شیمی ۱

۱۱۶- گزینهٔ «۲»

گزینهٔ «۱»: مدل اتمی بور، فقط قادر به توجیه طیف نشری خطی اتم هیدروژن می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: هرچه انرژی دریافت شده توسط الکترون در هنگام برانگیخته شدن بیشتر باشد، الکترون به لایه‌های بالاتری صعود می‌کند. در نتیجه در هنگام بازگشت به حالت پایه، انرژی بیشتری را به شکل نشر نور آزاد می‌کند. یعنی انرژی پرتوهای نشر شده بیشتر می‌شود و چون انرژی با طول موج رابطهٔ عکس دارد، نور با طول موج کوتاه‌تری منتشر می‌شود.

گزینهٔ «۳»: هنگامی که به اتم‌های گازی هر عنصر (نه هر حالت فیزیکی دیگر!) انرژی می‌دهیم، الکترون‌ها از لایه‌ای به لایهٔ بالاتر منتقل می‌شوند.

گزینهٔ «۴»: در نتیجهٔ جابه‌جایی الکترون بین لایه‌های مختلف الکترونی، انرژی با طول موج معین جذب یا نشر می‌گردد.

۱۱۷- گزینهٔ «۳»

آرایش الکترونی عناصر مس و اسکاندیم به صورت زیر است:

$${}_{29}Cu : 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^1$$

$${}_{21}Sc : 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^1\,4s^2$$

$l = 2$ مربوط به زیرلایهٔ d و $l = 1$ مربوط به زیرلایهٔ p است. همچنین تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت ${}_{21}Sc$ برابر ۳ می‌باشد.

۱۱۸- گزینهٔ «۴»

$${}_{33}As : 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^3$$

$${}_{21}Sc : 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^1\,4s^2$$

با توجه به آرایش‌های الکترونی نوشته شده، فقط عبارت (ت) درست است.

۱۱۹- گزینهٔ «۴»

$$\begin{cases} {}_{13}Al : [{}_{10}Ne]\,3s^2\,3p^1 \rightarrow 3 \\ {}_{39}Y : [{}_{36}kr]\,4d^1\,5s^2 \rightarrow 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_{42}Mo : [{}_{36}Kr]\,4d^5\,5s^1 \rightarrow 6 \\ {}_{34}Se : [{}_{18}Ar]\,3d^{10}\,4s^2\,4p^4 \rightarrow 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_{25}Mn : [{}_{18}Ar]\,3d^5\,4s^2 \rightarrow 7 \\ {}_{53}I : [{}_{36}Kr]\,4d^{10}\,5s^2\,5p^5 \rightarrow 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_{23}V : [{}_{18}Ar]\,3d^3\,4s^2 \rightarrow 5 \\ {}_{45}Rh : [{}_{36}Kr]\,4d^7\,5s^2 \rightarrow 9 \end{cases}$$

۱۲۰- گزینهٔ «۴»

این عنصر ۶ الکترون ظرفیتی دارد و از آنجایی که جزو عناصر دستهٔ p است، در گروه ۱۶ جدول تناوبی قرار دارد و با آهن که در دورهٔ چهارم است، هم‌دوره می‌باشد.

۱۲۱- گزینهٔ «۲»

گاز کلر از مولکول‌های دو اتمی Cl_2 تشکیل شده است و خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد.

۱۲۲- گزینهٔ «۱»

گاز آرگون به تنهایی ۰/۹۲۸ درصد حجم هوا را تشکیل می‌دهد.

۱۲۳- گزینهٔ «۳»

با افزایش ارتفاع فشار تقریباً به طور منظم کاهش می‌یابد (نمودار «ت»). ولی دما نامنظم تغییر می‌کند (نمودار «الف»).

۱۲۴- گزینهٔ «۳»

از گاز نیتروژن، برای پر کردن تایر خودروها، در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود. همچنین برای بسته‌بندی برخی مواد خوراکی از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

۱۲۵- گزینهٔ «۳»

کاهش دما در تروپوسفر $= ۱۱km \times ۶ = ۶۶^\circ C$

افزایش دما در استراتوسفر $= ۲۹km \times ۱/۶ = ۴۶/۴^\circ C$

تغییر دما دراثر افزایش ارتفاع : $۴۶/۴ - ۶۶ = -۱۹/۶^\circ C$

دما در سطح زمین ۱۴ درجه است، بنابراین دما در نهایت در ارتفاع $۴۰km$ حدود ۵/۶- درجهٔ سانتیگراد خواهد بود.

شیمی ۲

۱۲۶- گزینهٔ «۴»

نفت خام مخلوطی از هیدروکربن‌ها است.

۱۲۷- گزینهٔ «۲»

موارد «ب» و «پ» صحیح هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

«الف»: عنصر کربن در خانهٔ ششم جدول دوره‌ای جای داشته و در لایهٔ ظرفیت خود، ۴ الکترون دارد.

«ت»: اتم کربن برای رسیدن به آرایش هشت‌تایی می‌تواند دو پیوند یگانه و یک پیوند دوگانه، یا یک پیوند سه‌گانه و یک پیوند یگانه با اتم‌های دیگر بدهد.

۱۲۸- گزینهٔ «۲»

ویژگی‌های چسبندگی و نقطهٔ جوش با افزایش تعداد کربن آلکان‌ها، افزایش می‌یابد و ویژگی‌های فراریت و تمایل به جاری شدن با افزایش تعداد کربن، کاهش می‌یابند.

۱۲۹- گزینهٔ «۲»

نام ساختارهای الف و ت، ۳-اتیل-۲، ۵ - دی‌متیل هگزان است.

نام ساختار ب، ۲، ۳، ۳، ۴ - تترا متیل هگزان است.

نام ساختار پ، ۲، ۳، ۳، ۶ - تترا متیل هپتان است.

۱۳۰- گزینهٔ «۴»

نفت سبک کشورهای عربی همانند نفت سنگین آن‌ها، درصد برابری از بنزین و گازوئیل را دارا می‌باشد.

۱۳۱- گزینهٔ «۴»

آلکین‌ها واکنش‌پذیری زیادی دارند و با مواد شیمیایی مختلف واکنش می‌دهند.

۱۳۲- گزینهٔ «۱»

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «پ»: بیشترین سرانهٔ مصرف مواد خوراکی در ایران، مربوط به نان است.

عبارت «ت»: گوشت قرمز و ماهی علاوه بر پروتئین، غنی از انواع ویتامین و مواد معدنی نیز هستند.

۱۳۳- گزینهٔ «۳»

الف) یکای رایج دما درجهٔ سلسیوس است که با نماد « $^\circ C$ » نشان داده می‌شود.

ب) دما معیاری برای توصیف میانگین انرژی جنبشی ذرات سازندهٔ یک ماده است.

پ) با تغییر حالت فیزیکی یک ماده، جرم آن تغییر نمی‌کند. جرم و دما از عوامل مؤثر بر انرژی گرمایی هستند، بنابراین فقط یکی از عوامل مؤثر بر انرژی گرمایی (دما) تغییر می‌کند.

ت) نمونه‌ای با دمای کمتر در صورت داشتن جرم بیشتر می‌تواند انرژی گرمایی بیشتری داشته باشد.

۱۳۴- گزینهٔ «۳»

میانگین تندی ذره‌ها فقط به دما و انرژی گرمایی به دما و تعداد ذره‌ها بستگی دارد.

۱۳۵- گزینهٔ «۲»

فرض می‌کنیم xg طلا و yg نقره داریم:

$$Q = mc_{Au}\Delta\theta + mc_{Ag}\Delta\theta$$

$$\Rightarrow Q = x \times ۰/۲۴ \times ۱۰ + y \times ۰/۱۲ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow ۱۹/۲ = ۲/۴x + ۱/۲y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۲ \\ ۲/۴x + ۱/۲y = ۱۹/۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۸ \end{cases}$$

$$\text{درصد جرمی طلا} = \frac{۴}{۱۲} \times ۱۰۰ \simeq ۳۳/۳۳\%$$