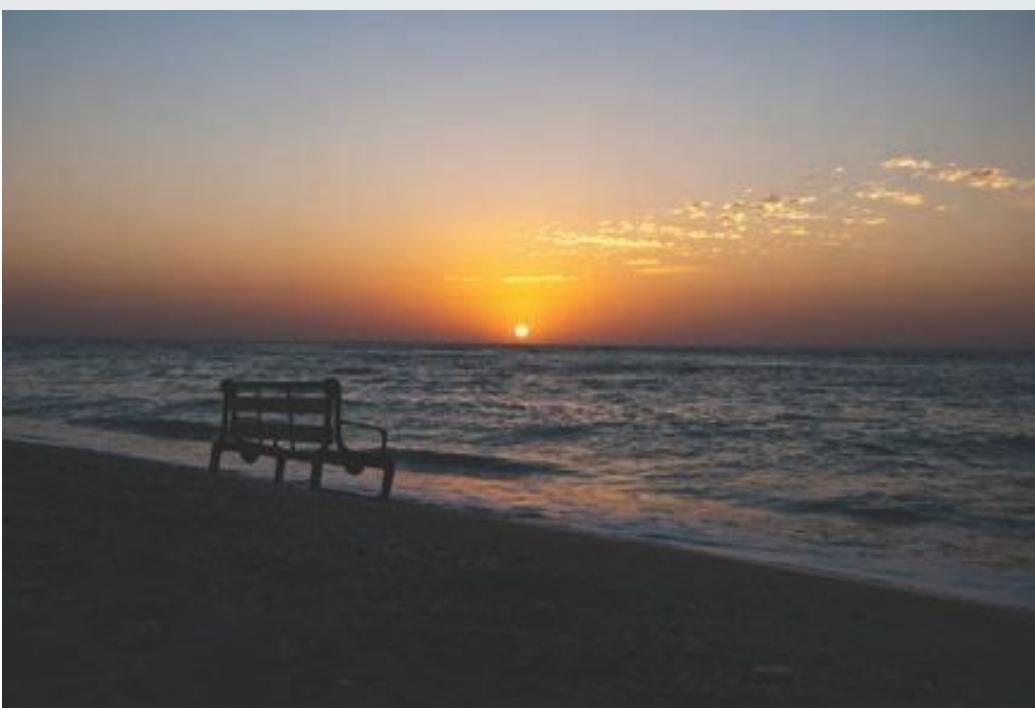




حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل



عکاس: سید محمد حسینی

جزیره قشم، روستای شبیبدراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهده دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهده طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشبینی را در ما بر می‌انگیرد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

حد بی‌نهایت

درس اول

حد در بی‌نهایت

درس دوم



یادآوری و تکمیل

در کلاس بازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x - a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 1 \\ \underline{- (2x^2 - 6x)} \\ \hline x + 1 \\ - (x - 3) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{الف) چندجمله‌ای } 1 \\ f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \text{ را بر دو جمله‌ای درجه اول } (x - 3) \text{ تقسیم} \\ \text{کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید:} \\ \text{ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با } R \text{ نشان دهیم، داریم: } R = \underline{\underline{4}} \\ \text{پ) مقدار } f(3) \text{ را محاسبه کنید: } f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4 \\ \text{ت) } (x - 3) \text{ و } R \text{ چه رابطه‌ای با هم دارند؟ برای بزرگ} \\ \text{ث) رابطه تقسیم را کامل کنید: } 2x^2 - 5x + 1 = (x - 3)(2x + \boxed{1}) + 4 \end{array}$$

الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیمانده آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{c} f(x) \\ \underline{-} \\ Q(x) \\ \hline R \end{array}$$

رابطه تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $a = x$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = (\underline{a} - a) Q(\underline{a}) + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطه اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x - a)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجه حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x - 2 \\ -(3x^3 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(\cancel{x} - \cancel{2}) \\ \hline R = 0 \end{array}$$

نحوه گشته: در چندجمله‌ای $2 - 5x - 2 = 3x^3 - 5x - 2$, مقدار $f(x)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

بنابراین $f(x) = 3x^3 - 5x - 2 = (x - 2)(3x^2 + 1)$. همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$g(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

الف) آیا $g(x)$ بر $(x + 1)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 + 1 \\ \hline x+1 \\ - (2x^3 + 2x^2) \\ \hline -x^2 + 1 \\ -(-x^2 - x) \\ \hline x+1 \\ - (x+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

پ) $g(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $2x^3 + 5x^2 - 3x - 1 = 2x^3 + 5x^2 - 2x^2 - 3x - 1 = x^2(2x + 5) - x(2x + 3) - 1$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است.

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 2(-2) - 1 \\ &= -16 + 20 + 4 - 1 = 7 \end{aligned}$$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایه قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ باشد به طوری که $m \neq 0$, آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال ۱:

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$, اگر $f(a) = g(a) = 0$, در این صورت دیگر قضیه بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = 0$ و $g(a) = 0$, نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$, تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \text{ را محاسبه کنید.}$$

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x = 1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - 1)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک

تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

۱- در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجه صورت و مخرج حد اکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجه حد اکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین توابع های نامال قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های متناوب مدلنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها لازم است.

فصل ۳ | حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

مثال : حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $(x + 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه صورت، آن را بر $(x + 2)$ تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 4 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline -2x^2 + 4 \\ -(2x^2 + 4x) \\ \hline -4x + 4 \\ -(4x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابر رابطه تقسیم می‌توان نوشت $(x + 2)(2x^2 - x + 2)$. بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2x^2 - x + 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{-2 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = 1$$

تذکر : گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x - 5}$ را در نقطه به طول $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه $x = 5$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $(2 - \sqrt{x-1})$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x - 5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

مثال : حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x-2}}$ را در $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.
 حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در $x = 8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $(x^2 - 8x)$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 8} h(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x-2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 4)}{x-8} = 8(4 + 4 + 4) = 96$$

درس اول | حد بی نهایت

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$(الف) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

$$(ب) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

$$(پ) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$$

$$(ت) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$$

$$(ث) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} \xrightarrow[\text{صفر خواهد شد}]{\text{صورت و مخرج}} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n - \sqrt{n}}{(n-1)(n+2)} \times \frac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-x}{(n-1)(n+2)(n+\sqrt{n})}$$

$$(ج) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n(n-1)}{(n-1)(n+2)(n+\sqrt{n})} = \frac{1}{(1)(2)} = \frac{1}{4}$$

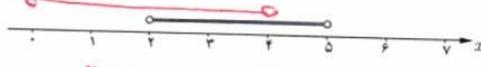
حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a ، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطه a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر (a, b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

مثال: بازه $(5, 2)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازه $(4, 0)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



همسایگی محدود: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه

مجموعه $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} - \{x_0\}$ یک همسایگی محدود x_0 نامیده می‌شود.

$$\Rightarrow (1, 4)$$

مثال: مجموعه $\left\{ \frac{5}{2}, 4 \right\} - \{3\}$ یک همسایگی محدود ۳ می‌باشد.

$$(ج) \lim_{n \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)(n+2)} \times \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}}{(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)} = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} + 1)}$$

$$= \frac{1}{(1)(1+1+1)} = \frac{1}{3}$$

۴۳/۱ حمله در کلاس

$$\text{ا) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \Rightarrow \frac{-9 - 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{حد صفر} = \text{حد مخرج} \\ \text{یعنی} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-4)(x+4)}{x(x+3)} = \frac{-4 - 4}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{rx^2 - rx + 1}{rx^2 + x - 1} = \frac{r(\frac{1}{r})^2 - r(\frac{1}{r}) + 1}{r(\frac{1}{r})^2 + \frac{1}{r} - 1} = \frac{1 - r + 1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{(x-\frac{1}{r})(rx-1)}{(x-\frac{1}{r})(rx+1)} = \frac{r(\frac{1}{r}) - r}{r(\frac{1}{r}) + r} = \frac{0}{2r} = 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} rx^2 - rx + 1 \\ (rx^2 - rx) \\ -rx + 1 \\ (-rx + 1) \end{array} \right.$

$\frac{x - \frac{1}{r}}{rx - 1}$

$\frac{rx^2 + x - 1}{(rx^2 - rx)}$

$\frac{rx - 1}{(rx - 1)}$

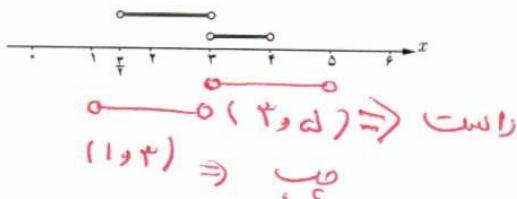
$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 4}{rx^2 - rx^2 + rx - 9} \Rightarrow \frac{9 - 9 + 4}{9r^2 - 11r + 4r - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(rx^2 - rx + 1)} = \frac{2 - 3}{18 - 18 + 1} = \frac{1}{1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{rx^2 - rx^2 + rx - 9}{rx^2 - rx^2 + rx - 9} \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ rx^2 - rx + 1 \end{array} \right. \\ & - \frac{(rx^2 - 4rx)}{(rx^2 - 4rx)} \\ & - \frac{rx^2 + rx - 9}{rx^2 + rx - 9} \\ & - \frac{(rx^2 + 2rx)}{(rx^2 + 2rx)} \\ & \frac{rx - 9}{rx - 9} \end{aligned}$$

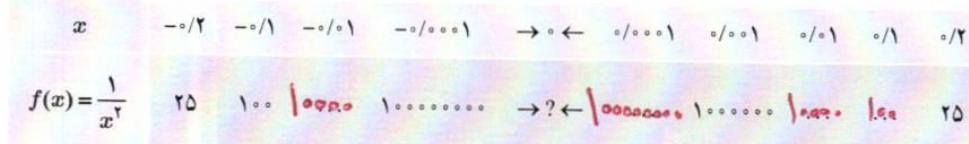
همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x, x+r)$ یک همسایگی راست x نامیده می‌شود. همچنین، $(x-r, x)$ یک همسایگی چپ x می‌نامیم.

مثال: بازه $(4, 3)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

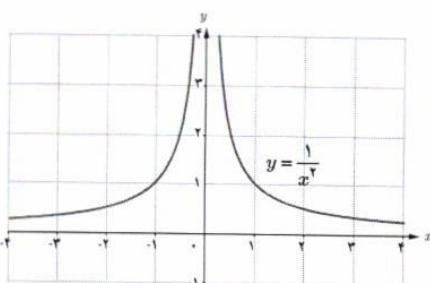


فِعَالِيَّت

می خواهیم مقدار $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ را در صورت وجود به دست آوریم. می دانیم تابع $\frac{1}{x}$ در هر نقطه غیر صفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محدود صفر توجه کنید.



در جدول دیده می شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می شود، مقدار x نیز به صفر نزدیک می شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x}$ ، به هر اندازه دلخواه بزرگ می شوند. در واقع با دقت در نمودار^۱ تابع $y = \frac{1}{x}$ می توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازه کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ



نماییم. بنابراین دیده می شود که مقدارهای بزرگ شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی کنند؛ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ موجود نیست. با این حال، در چنین موقعی برای $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty$ توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محدود صفر، می نویسیم

تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر تزدیک کرده باشیم. این گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱- رسیم تعداد رایهای گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعريف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محدود a تعریف شده باشد.

رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

تعريف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محدود a تعریف شده باشد. رابطه

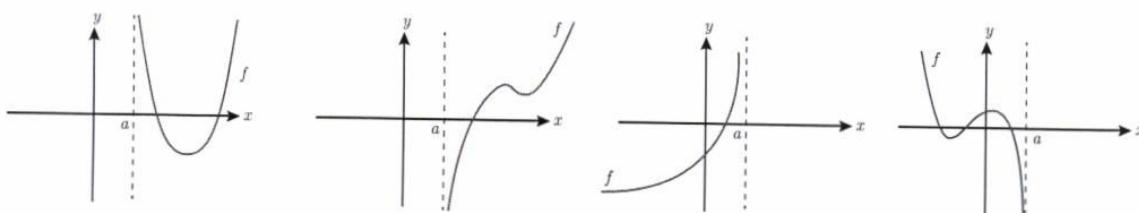
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی ... به a نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفه نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ در زیر آمده است.

تعريف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطه

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.

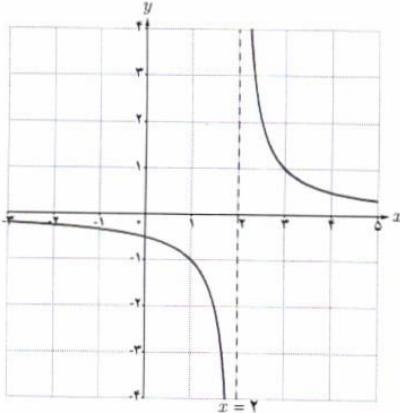


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



مثال : حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.

حل : نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نماید. وقتی $x \rightarrow 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک تزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{x-2}$ مثبت و سیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود.

بنابراین همان طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ به همین ترتیب وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار تزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حد های نامتناهی قضیه زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه : فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq \pm\infty$ در این صورت :

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محدودی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محدودی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $0 < L < \infty$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محدودی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $0 < L < \infty$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محدودی از a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر : قضیه قبل، برای حالتی که $a^+ \rightarrow x$ و یا $a^- \rightarrow x$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل : مخرج در تزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است.

پس بنابر قسمت (پ) قضیه قبل داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = -\infty$$

۱- در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت هایی مثل $\infty \times \infty$ و $\infty - \infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سوالات ارزشیابی الزامی است.) مهم (

$$\text{ا) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0^-} = -\infty \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[-\frac{1}{x^2}]}{1 + (-\frac{1}{x^2})} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

کار در کلاس

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x)}{5-x} = \frac{10}{0^-} = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|-3-3|} = \frac{2}{0} = +\infty$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{\infty+1}{\sin^2 \infty} = \frac{1}{0} = +\infty$$

نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محدود $-2 < x < 2$ تعریف شده باشد به طوری کهنمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محدود $-2 < x < 2$ تعریف شده باشد به طوری کهنمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محدود $-2 < x < 2$ تعریف شده باشد به طوری کهنمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محدود $-2 < x < 2$ تعریف شده باشد به طوری کهنمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محدود $-2 < x < 2$ تعریف شده باشد به طوری که

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - x}{4x^3 - 1}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^3 - 25}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$$

حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x+2}}$$

حدهای زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0} = -\infty \quad \text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{0} = -\infty$$

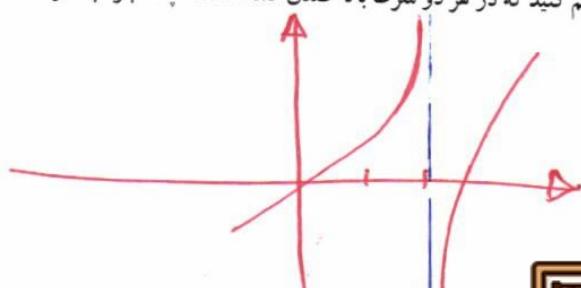
$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty \quad \text{ه) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{(x-3)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{ز) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-15}{9-9} = \frac{-14}{0^+} = -\infty \quad \text{ح) } \lim_{x \rightarrow (-\infty)^-} \frac{-3x}{x^2-4} \quad \text{خ) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan x$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan x$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$$

الف) عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهد.ب) عبارت $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهد.پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟آدرس سایت
WWW.TVYA.IR

نیمه گشته:

کروه ریاضی مقطع دوم منوشه، استان خوزستان

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

 $\Delta v / 1$

متن

$$f(-1) = (-1)^r + (-1)^r + 1 = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow R = 0$$

① متن

$$\begin{array}{r} \cancel{r x^r} + x^r + 1 \\ - (\cancel{r x^r} + r x^r) \\ \hline - x^r + 1 \\ - (-x - x) \\ \hline x^r + 1 \\ x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\frac{1}{r} - 1}{f(\frac{1}{r})^{r-1}} = 0$$

② متن

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{(x - \frac{1}{r})(rx)}{(x - \frac{1}{r})(r^r + r)} = \frac{1}{(r+r)} = \frac{1}{2r}$$

$$\textcircled{3} \quad \left\{ \frac{12\Delta - 100 - 20 - \Delta}{2\Delta - 2\Delta} = 0 \right.$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{(x-\Delta)(x^r + x - 1)}{(x-\Delta)(x+\Delta)} = \frac{2\Delta + \Delta - 1}{\Delta + \Delta} = \frac{3\Delta}{2\Delta} = \frac{3}{2} \right)$$

نیمه گشته:
کروه ریاضی مقطع دوم منوشه، استان خوزستان

$$\textcircled{4}) \quad \frac{14 - 12 - t}{-4t + 4t - t + t} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow -t} \frac{(nx+t)(n-1)}{(n+t)(n^r + 1)} = \frac{-t}{1r}$$

از روش $\frac{0}{0}$ تفسم به هر کسی اسما داشت

$$\textcircled{5}) \quad \frac{1-1}{1-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{rx-1}}{x(x-1)} \times \frac{x + \sqrt{rx-1}}{x + \sqrt{rx-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - rx + 1}{x(x-1)(x + \sqrt{rx-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^r}{x(x-1)(x + \sqrt{rx-1})} = \frac{0}{1(1+1)} = 0$$

$$\textcircled{6}) \quad \frac{q-q}{r-r} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{r - \sqrt{rx+1}} \times \frac{r + \sqrt{rx+1}}{r + \sqrt{rx+1}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(r+x)}{r - rx - 1 - 1 + r - rx}$$

$$= \frac{4(4)}{-1} = -16$$

کanal Telegram
@TVYA_IRآدرس سایت
WWW.TVYA.IR

حل مسائل $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\text{Q1) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{-x+2} = \dots \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)}{\sqrt[3]{x^2} + x} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \epsilon}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \epsilon}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \epsilon)}{(x+1)} = \frac{x(\infty - \ell + \epsilon)}{1} = -\infty$$

(Q2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

(Q3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

(Q4) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{[\pi] - x}{\pi - x} = \frac{[\pi] - x}{\pi^- - x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

اعنی حد اعیانی $f(n)$ وقتی n را زیر مقدار کمتر از $\frac{\pi}{2}$ عددی داد

نزرگی مسود، زیر هر عدد مثبتی (مستدلتواه) بزرگتر مسود

اعنی حد اعیانی f وقتی n را زیر مقدار کمتر از $\frac{\pi}{2}$ عددی داد

مسود، زیر هر عدد منفی دلتواه، کوچکی مسود.



حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حد های نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ می کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ می دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربع به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل های زیر رنگ کنیم. در مرحله اول، نصف سطح مربع را رنگ می کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت های رنگ شده را رنگ می زنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم.

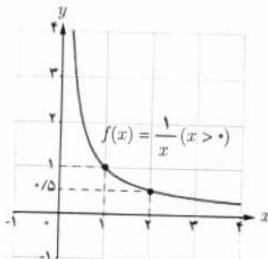
مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$	$\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$	$\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$...

$$1 - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1027}{1024}$$

الف) در مرحله دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحله n ام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحله n ام چه می توان گفت؟



مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر می گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	۱	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001	...	$\rightarrow ?$



از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x ، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر تزدیک و تزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از $1 \cdot 10^{-6}$ باشد، لازم است x بزرگ‌تر از 10^6 انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر تزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از $1 \cdot 10^{-6}$ باشد؟ با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. به طور کلی می‌توان گفت:

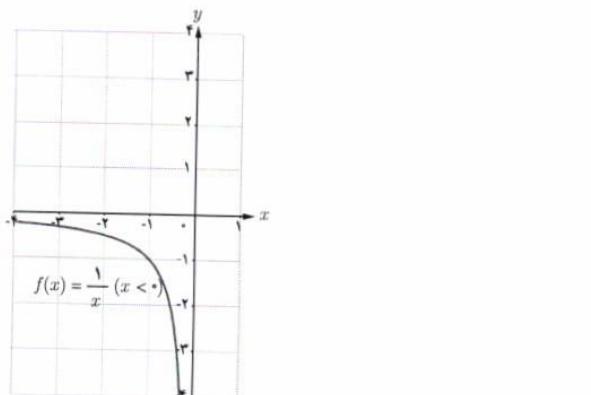
اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، رابطه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L تزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که هر مقدار **لطفاً** L می‌توان $f(x)$ را به L تزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر **کافی**... کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در بازه $(-\infty, 0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که

x	$-\infty \leftarrow$	\dots	-1000000	-100000	-1000	-100
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 \leftarrow$	\dots	-0.00001	-0.000001	-0.0001	-0.01



فصل ۳ | حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

در مورد حد های نامتناهی، دو قضیه زیر مفیدند.

قضیه ۱: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \infty \quad \text{(الف)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{(ب)}$$

قضیه ۲: فرض کنیم l و m دو عدد طبیعی باشند. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \pm m \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l \cdot m \quad \text{(ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{m} \quad (m \neq 0)$$

تذکر: قضیه ۲ برای وقتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.حل: برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{3x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 - 0 + 0} = 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = \frac{3+0-0}{3+0-0} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1} \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t} \quad \text{(ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x} \quad \text{(ج)}$$

الف) تابعی مثل بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (۱) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.ب) تابعی مثل بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100° باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانان مقایسه کنید.

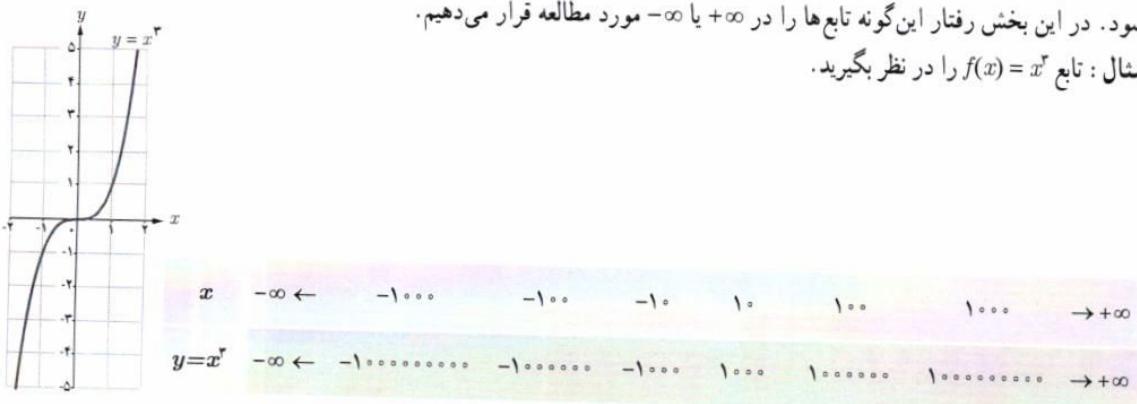
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{t^2} - \frac{5}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t}}{\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t}} \\ &= \frac{0-0}{1+0} = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x+2} &= -1 \quad \text{(الف)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x^2-2x}{x^2} &= 100 \quad \text{(ج)} \end{aligned}$$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $+∞ \rightarrow x$ یا $-∞ \rightarrow x$, مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ (با کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این گونه تابع‌ها را در $+∞ \rightarrow$ یا $-∞ \rightarrow$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می دهد که با افزایش مقدار x ، مقدار x^3 هم افزایش می یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم:

تعريف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. رابطه

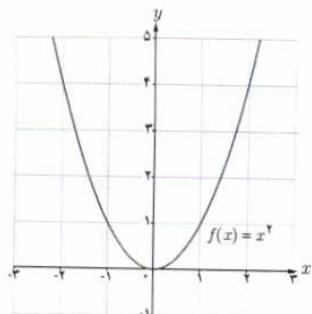
مشت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواه، کوچکتر کرد. در این حالت می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می توان گفت:

تعريف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(b, -\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

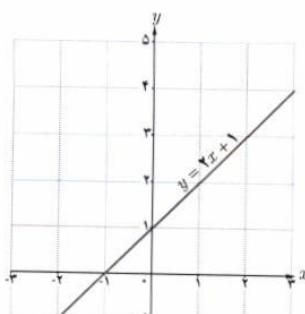
تذکر ۱: رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.
تذکر ۲: رابطه‌های مانند $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ - عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



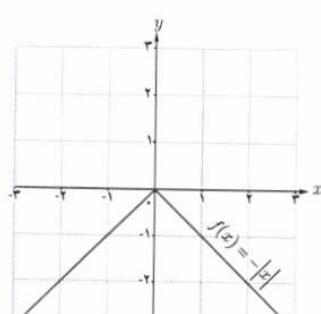
(الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$



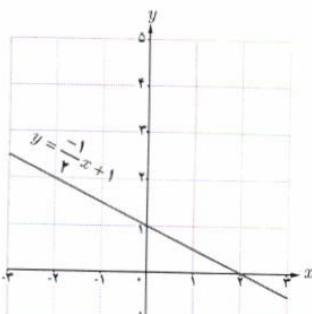
(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 1) = +\infty$



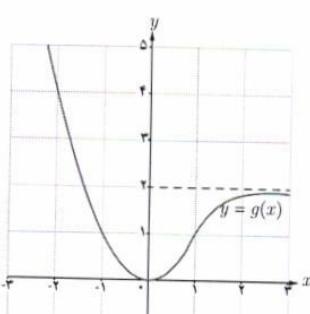
(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



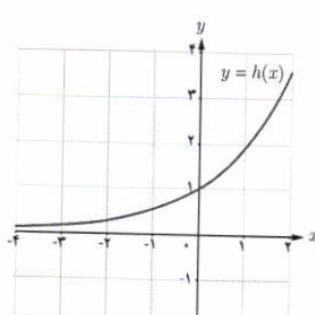
(ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = -\infty$



(ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



(ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

از قضیه زیر برای محاسبه حد تابع یک جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ - استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ منفی}) \end{cases}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^3)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

حل:

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} + 5 \right)$

 بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^3}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (0 - 0 + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} - \frac{9}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (-2 + 0)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جمله با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^3 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^5}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = +\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 + 5x^3}{2x^3 + 9}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\Delta x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\Delta}{x^2} = \frac{\Delta}{+\infty} = 0$

تمرین

(الف) نمودار هر یک از توابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

(الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{حدندرد}$$

(ب) $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

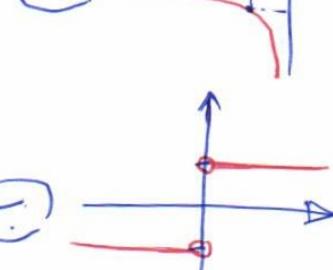
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

۶۲

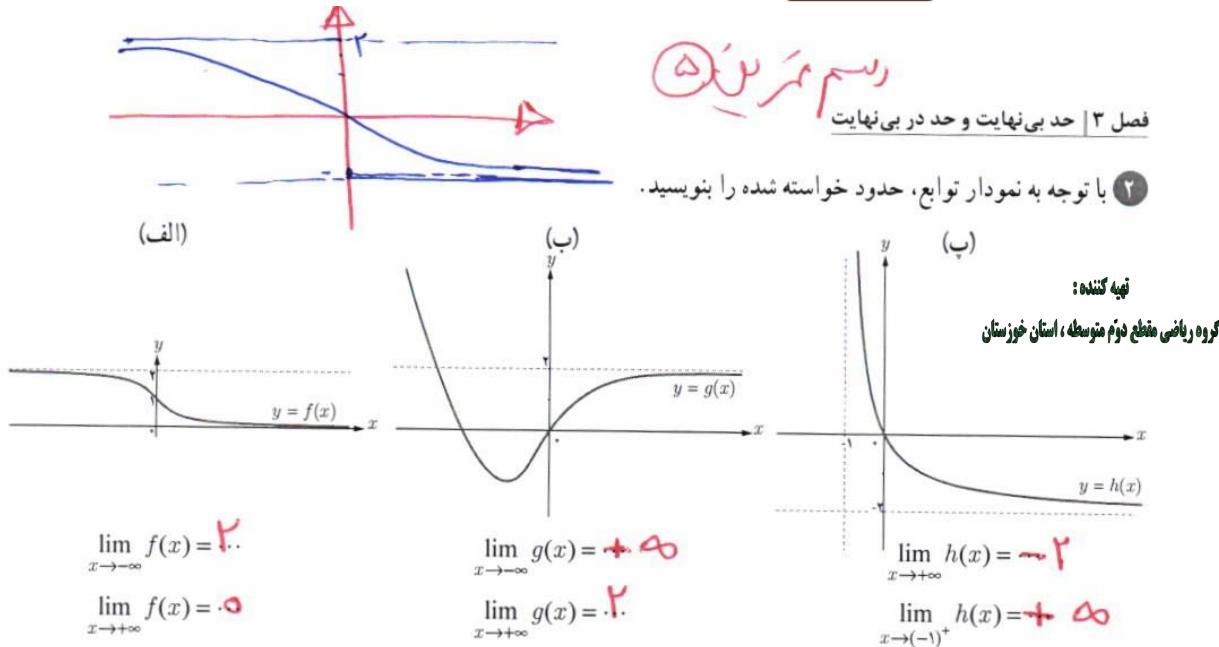
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(+\infty) = -\infty$$

(الف)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$



۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

نیپا کندو:

۶ حدود زیر را محاسبه کنید.

۵) الف) هر یک از رابطه‌های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابع مانند $y = \frac{1}{x}$ را درسته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۶۴ (۱۸) هدایت از راهی دلخواه می توان ۱- نزدیک کرد، مسترد طلب

دلله يخ دندلزه کافی بزرگ اهیار سود.

(۱) رابطہ اندیز کا فیصلہ کوں بے بعد $\frac{1}{2}$ ترددیں کر دے مسروط ہے (نیلے x بعدر
کافی کو مکمل و متفق احتیار نہ کوں) ب