

تابع

فصل



عکس: سایه هنری

پل سفید - اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانه کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

تراكيب توابع

درس اول

درس دوم

تابع وارون

درس اول

توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

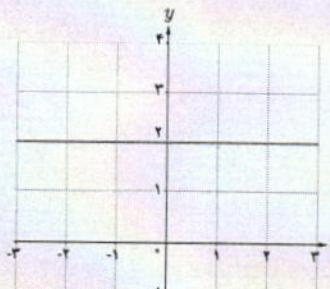
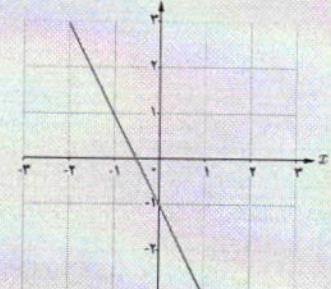
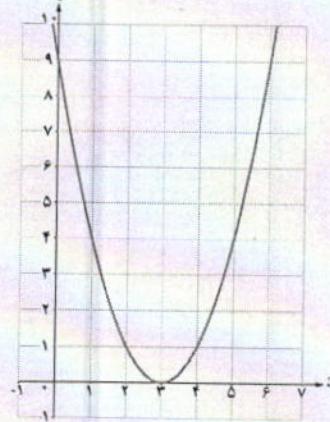
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a \neq 0$, تابع به صورت $f(x) = ax + b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی, مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های 1 و 2 هستند.

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه تابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال: تابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه $1, 2, 3, 4, 5$ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{2}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{4}x^2$$

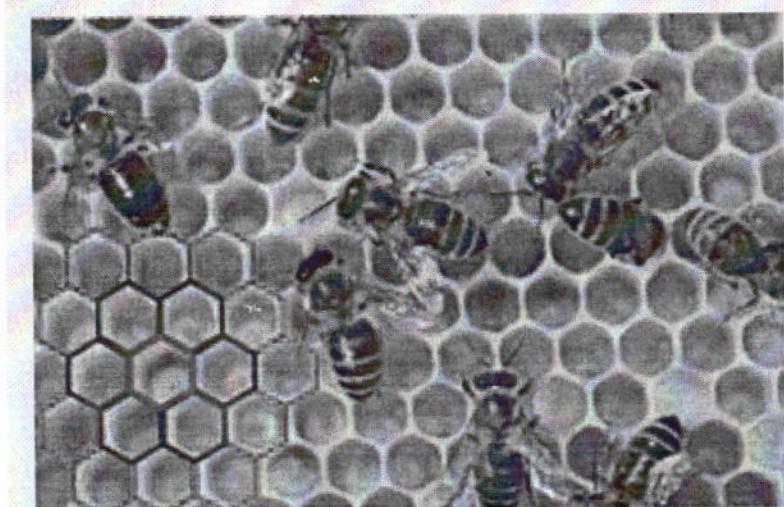
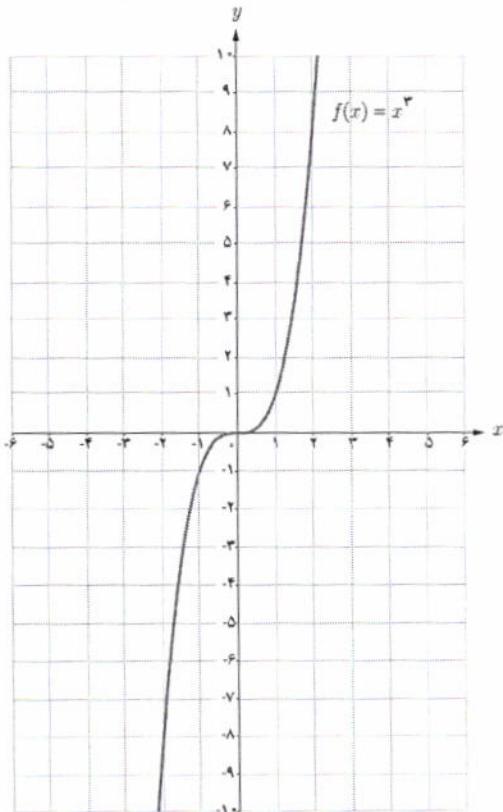
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

| درجه تابع | ۰ | ۱ | ۲ |
|-----------|---|--|---|
| نام تابع | ثابت | خط | درجة دوم |
| ضابطه کلی | $f(x) = b$ | $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) | $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) |
| | $f(x) = 2$ | $f(x) = -2x - 1$ | $f(x) = x^2 - 6x + 9$ |
| مثال |  |  |  |

تابع درجه ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع \mathbb{R} است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

| x | $f(x) = x^3$ |
|----------------|----------------|
| -2 | -8 |
| -1 | -1 |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{8}$ |
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |



خواندنی

الگوی کلی لانه زنبور عسل به صورت یک شش ضلعی است که در دور اول با شش تاشش ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تاشش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r) = 3r^3 - 3r + 1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r = 1, 2, 3$ به دست آورید؟

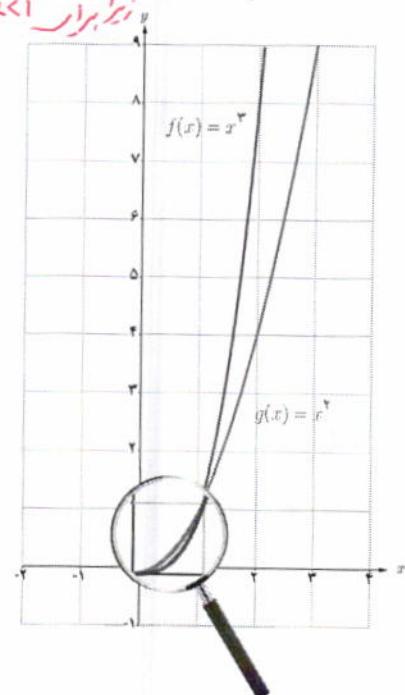
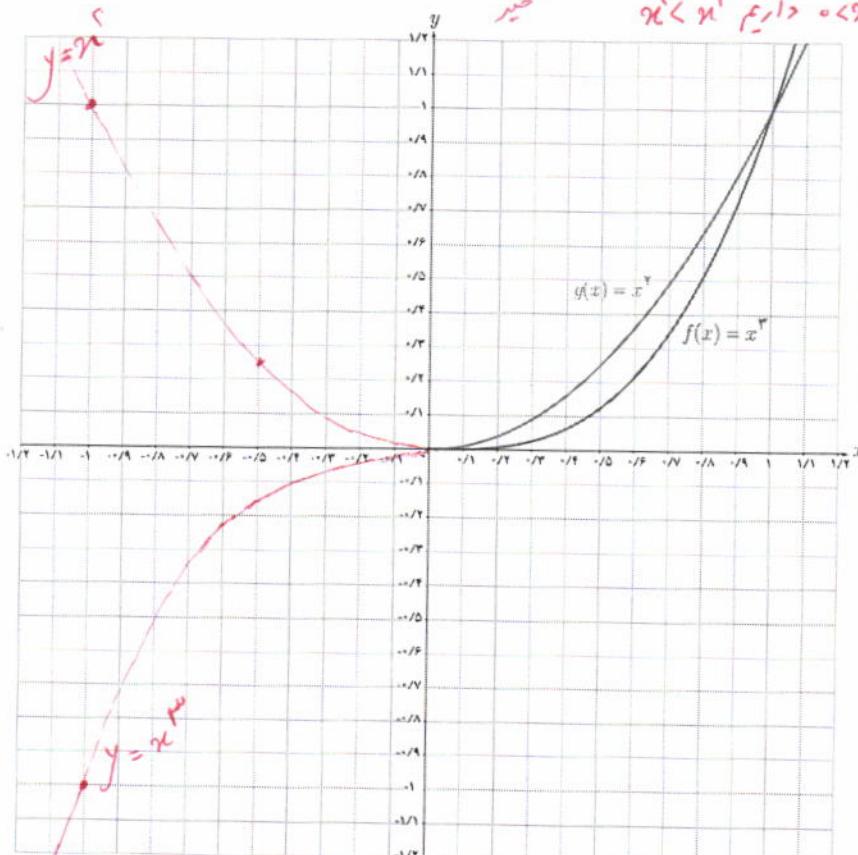
$$f(1) = 3(1)^3 - 3(1) + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$f(2) = 3(2)^3 - 3(2) + 1 = 24 - 6 + 1 = 19$$

$$f(3) = 3(3)^3 - 3(3) + 1 = 81 - 9 + 1 = 73$$

فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^r$ و $g(x) = x^t$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند:
 الف) آیا برای تمام x ‌های نامنفی، نمودار $f(x) = x^r$ بالای نمودار $g(x) = x^t$ قرار دارد؟
 ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید.



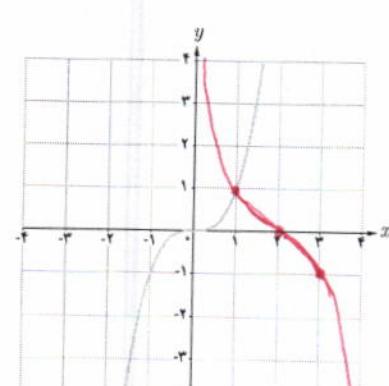
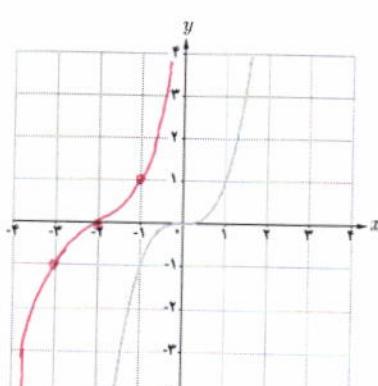
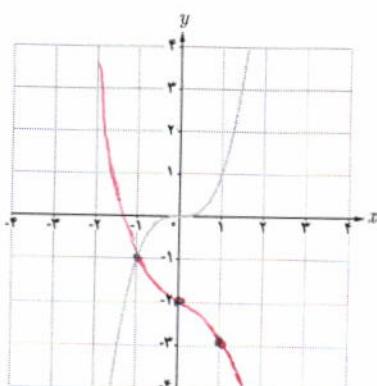
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^r$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

(الف) $y = -x^r - 2$

(ب) $y = (x+2)^r$

(ب) $y = -(x-2)^r$



به کمک نمودار تابع $y = x^r$, ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظر کنید.

الف) $y = (x-1)^r + 2$ (۴)

ب) $y = (x+1)^r - 1$ (۵)

ج) $y = x^r + 1$ (۶)

الف) $y = (x-2)^r$ (۷)

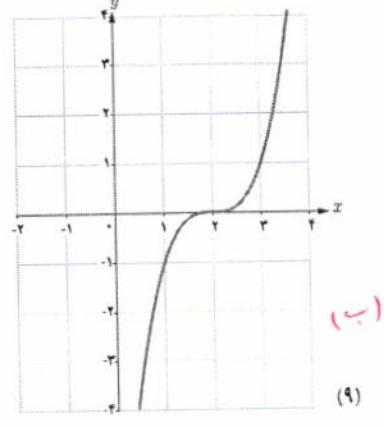
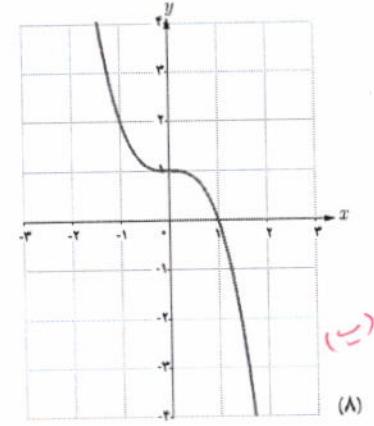
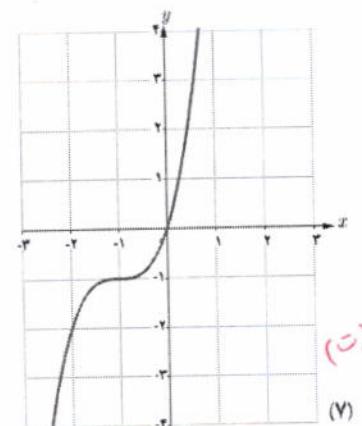
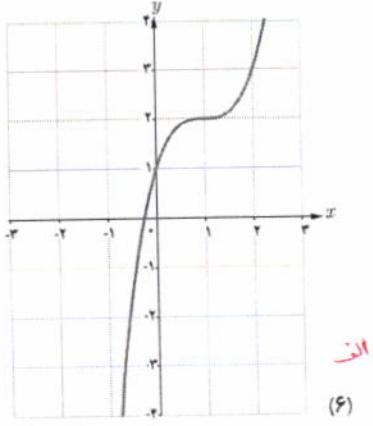
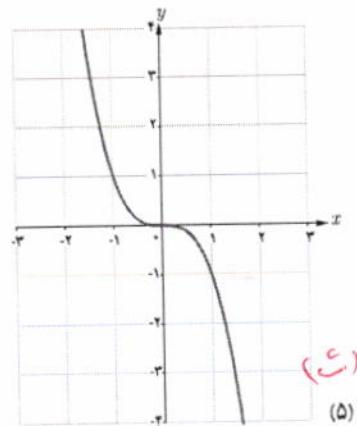
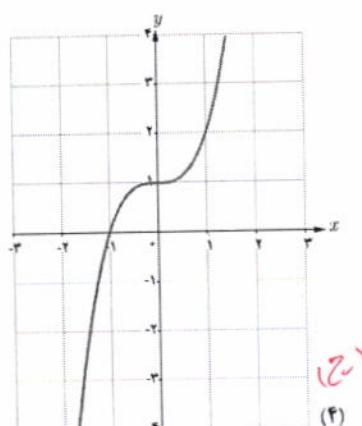
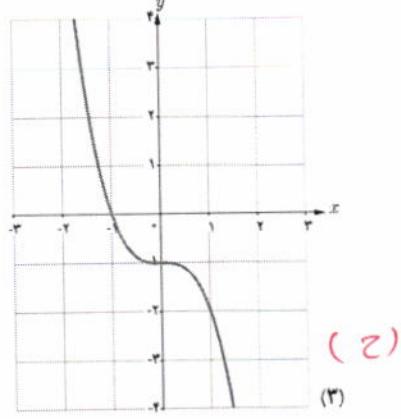
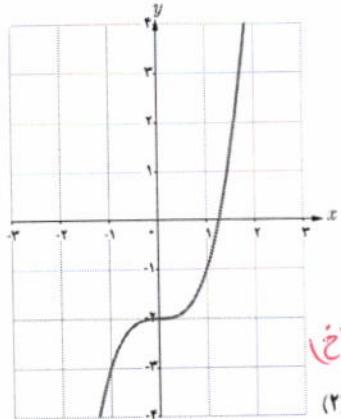
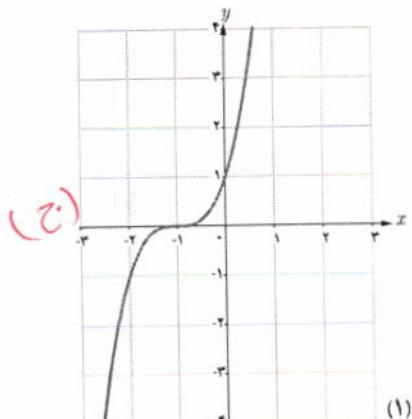
ب) $y = -x^r$ (۸)

ج) $y = -x^r - 1$ (۹)

الف) $y = -x^r + 1$ (۱۰)

ب) $y = (x+1)^r$ (۱۱)

ج) $y = x^r - 2$ (۱۲)



توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

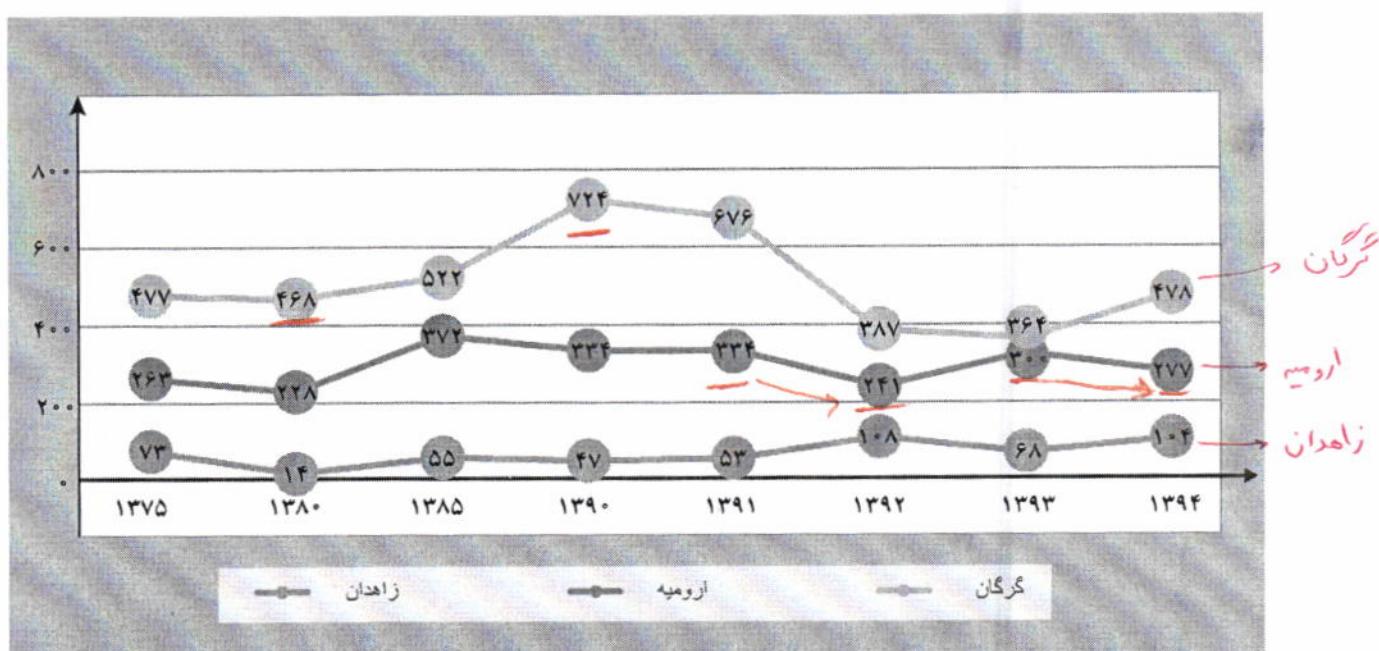
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (بر حسب میلی متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی متر و در سال ۹۰ ۳۲۴ میلی متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی متر و در سال ۹۰ ۷۲۴ میلی متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

(الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

از سال ۸۵ تا ۹۰ صعود

(ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

از سال ۹۱ تا ۹۳ روند نزولی
از سال ۹۳ تا ۹۴ روند نزولی

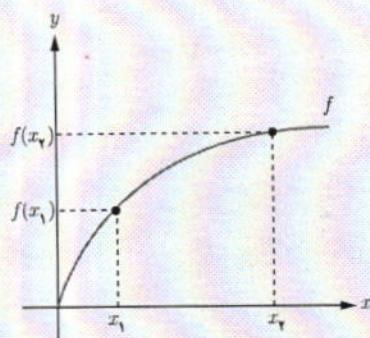


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی متر)^۱

۱- منبع: سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir

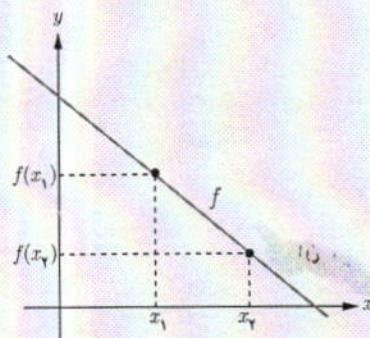
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$, آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



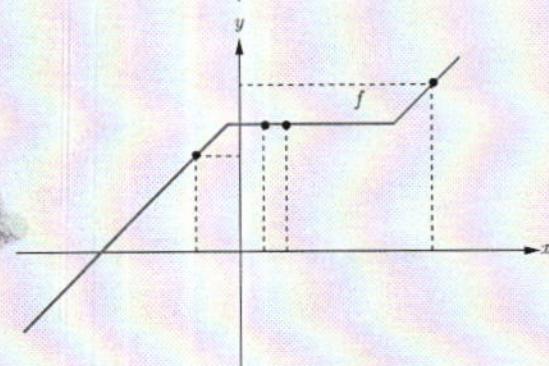
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$, آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



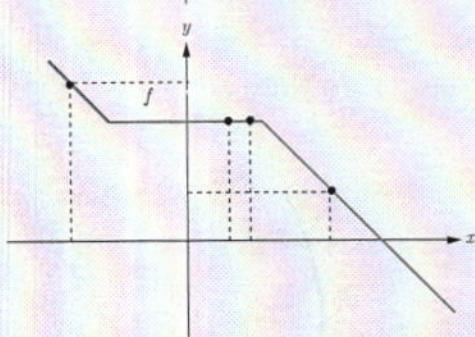
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$, آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



تابع نزولی

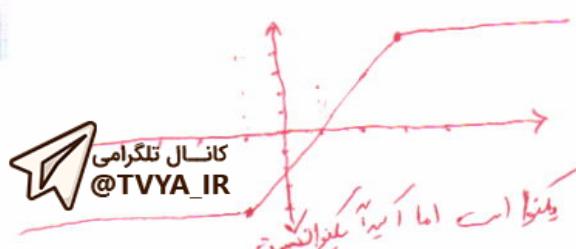
اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$, آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

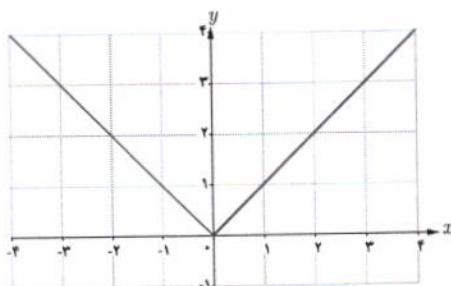


تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً پکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع پکنوا گوییم. تابع اکیداً پکنوا همواره پکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهد.

$$y = |n+1| - |n-3|$$





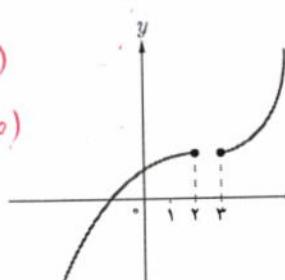
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در \mathbb{R} نه صعودی است نه نزولی.

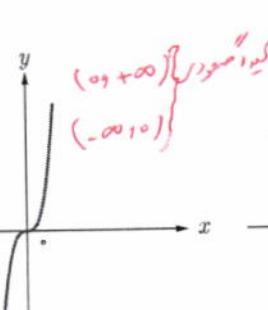


هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

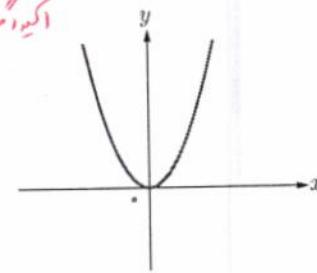
اکیداً صعودی
 $(-\infty, 2)$
اکیداً نزولی
 $(3, +\infty)$



(الف)

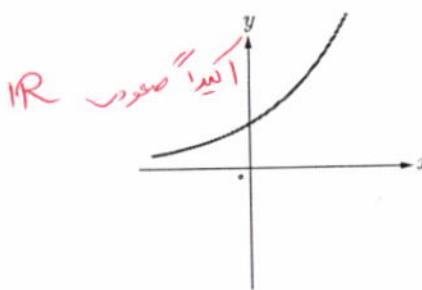


(ب)

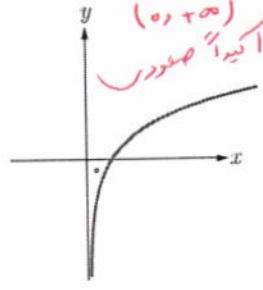


(پ)

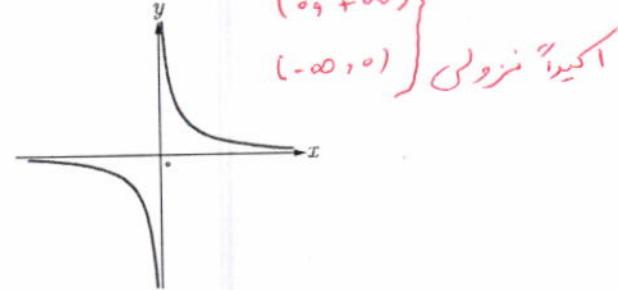
اکیداً صعودی
 $[0, +\infty)$
اکیداً نزولی
 $(-\infty, 0]$



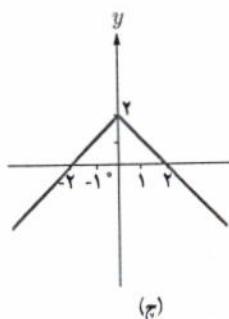
(ت)



(ث)

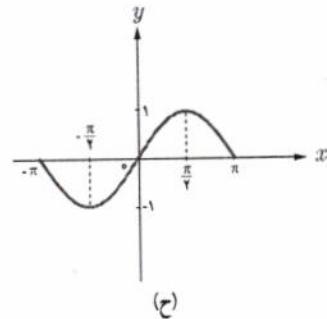


(ج)



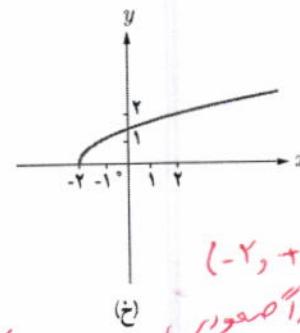
(ح)

اکیداً نزولی $(-1, +\infty)$
اکیداً صعودی $(-\infty, -1)$



(خ)

اکیداً صعودی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
اکیداً نزولی $(-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, +\infty)$
 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

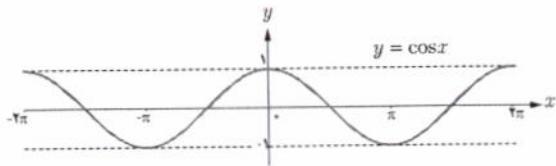
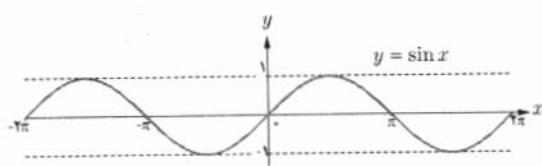


(ه)

اکیداً صعودی
 $(-2, +\infty)$

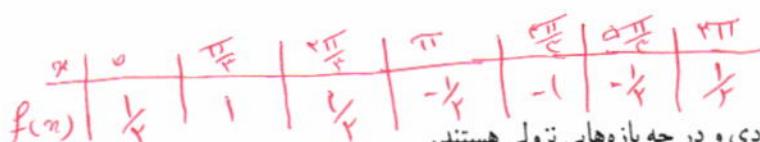


نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.



| | | | | | | | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| x | $[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$ | $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ | $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ | $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ | $[0, \frac{\pi}{2}]$ | $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ | $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ |
| $y = \sin x$ | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی |

| | | | | | | | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| x | $[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$ | $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ | $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ | $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ | $[0, \frac{\pi}{2}]$ | $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ | $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ | $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ |
| $y = \cos x$ | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی | صعودی | نزولی |



نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

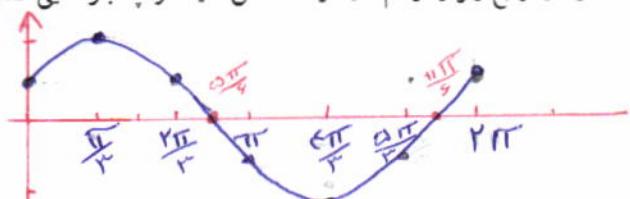
(الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

$D_f = [0, 2\pi]$

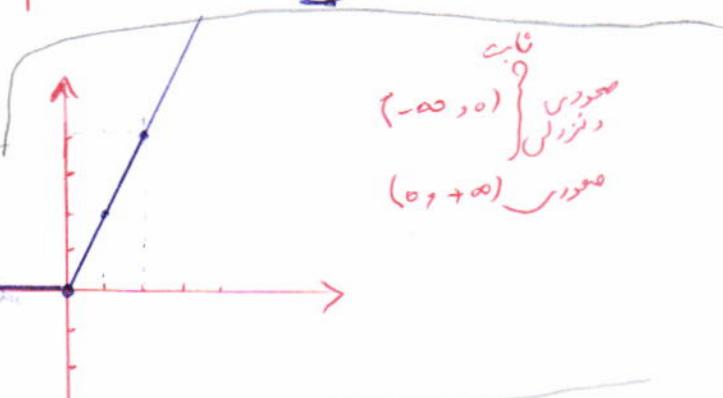
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \leftarrow$ صعودی $\rightarrow \left(\frac{4\pi}{3}, \pi\right)$

نزولی $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

(ب) $g(x) = x + |x|$



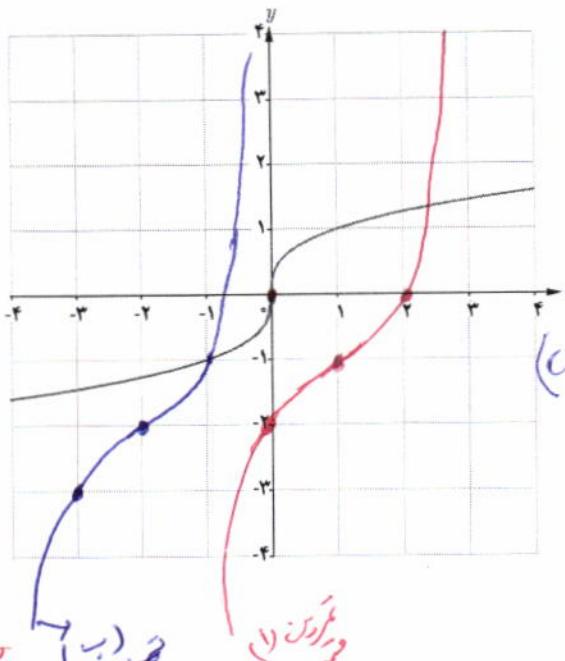
(پ) $t(x) = -x^2 - 1$



اگر $a < 0$ نزولی است

| n | y |
|-----|-----|
| -2 | ✓ |
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | -2 |
| 2 | -9 |

فعالیت



| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

(الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نماید.
 دامنه و برد هر دو مجموعه انداد حقیقی است.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{نیزه} (-\infty, -4) \\ \text{ثابت} (-4, 2) \\ \text{صعود} (2, +\infty) \end{array}$$

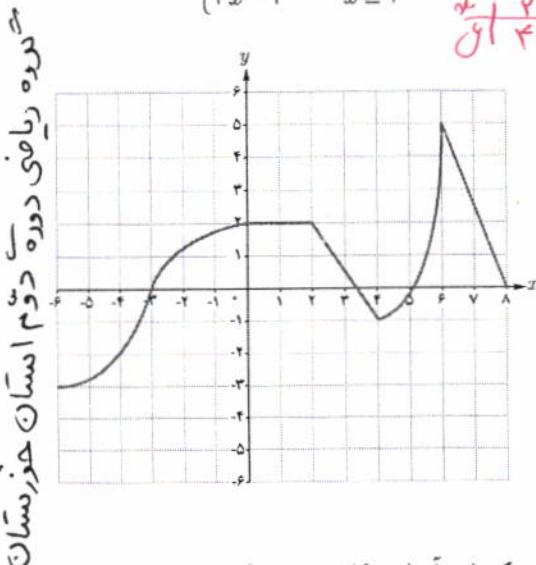
۱ نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نماید.
 دامنه و برد هر دو مجموعه انداد حقیقی است.

(ب)

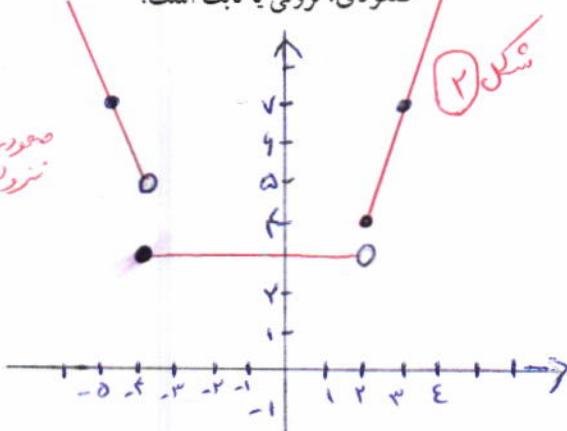
 $y = (x+2)^3 - 1$

۲

نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نیزه‌ی یا ثابت است، مشخص کنید.



- صعود (0, 5)
- ثابت (0, 2)
- نیزه (2, 4)
- صعود (4, 9)
- نیزه (9, +\infty)



۳ تابع نمایی $y = 2^x$ و تابع لگاریتمی $y = -\log x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکتوانی آنها در کلاس بحث کنید.

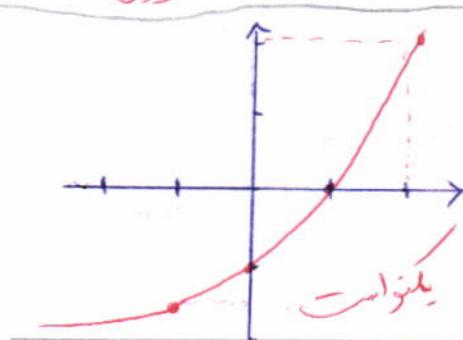
۴ تابع $y = x^a$ در بازه $(-\infty, a]$ نیزه است، حداقل مقدار a چقدر است؟

۵ تابع مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نیزه است.

$$y = 2^{-x} \rightarrow \text{اکیدا نیزه است}$$

$$y = 2^x - 2$$

| | |
|----|------|
| -1 | -3/2 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |



$$y = -\log x + 2$$

| | |
|----|----|
| -1 | 3 |
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | -1 |



در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می باید و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به دست می آید :

$$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (\text{واحد } t, \text{ ساعت است}).$$

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(2) = 10$$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 10° درجه سانتی گراد است.

$$d(1) = 4(1) + 2 = 4$$

$$d(3) = 4(3) + 2 = 14$$

همچنین اگر یک ماده غذایی را با دمای 2° درجه سانتی گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه زیر به دست می آید :

$$n(d) = 2^\circ d^2 - 8^\circ d + 50^\circ; \quad 2 \leq d \leq 14$$

که در این تابع، دمای ماده غذایی پس از خروج از یخچال بر حسب درجه سانتی گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$n(10) = 2^\circ (10)^2 - 8^\circ (10) + 50^\circ = 170^\circ$$

يعني تعداد باکتری های موجود در یک ماده غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای 10° درجه سانتی گراد به 170° افزایش یافته است.

$$n(2) = 2^\circ (2)^2 - 8^\circ (2) + 50^\circ = 10 - 16 + 50^\circ = 44^\circ$$

$$n(3) = 2^\circ (3)^2 - 8^\circ (3) + 50^\circ = 18 - 24 + 50^\circ = 44^\circ$$

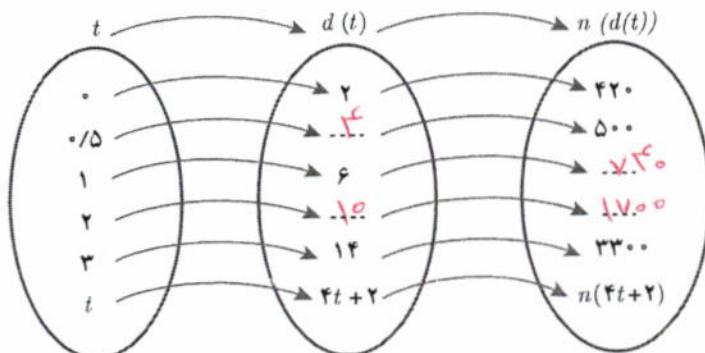
به طور کلی می توان گفت با استفاده از تابع d ، با داشتن زمان، می توان دمای غذا و با استفاده از تابع n ، با داشتن دمای غذا، می توان تعداد باکتری ها را به دست آورد، به عبارت دیگر :



از الف و ب می توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری های موجود در یک ماده غذایی که به میزان 2 ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر 170° تاست.

پ) جدول رو به رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

| | | |
|-------|-------------------------|--|
| t | $d(t) = 4t + 2$ | $n(d(t)) = n(4t + 2)$ |
| 0 | $d(0) = 2$ | $n(d(0)) = n(2) = 42^\circ$ |
| $0/5$ | $d(0/5) = \frac{12}{5}$ | $n(d(0/5)) = n(\frac{12}{5}) = 50^\circ$ |
| 1 | $d(1) = 6$ | $n(d(1)) = n(6) = 46^\circ$ |
| 2 | $d(2) = 10$ | $n(d(2)) = n(10) = 47^\circ$ |
| 3 | $d(3) = 14$ | $n(d(3)) = n(14) = 43^\circ$ |



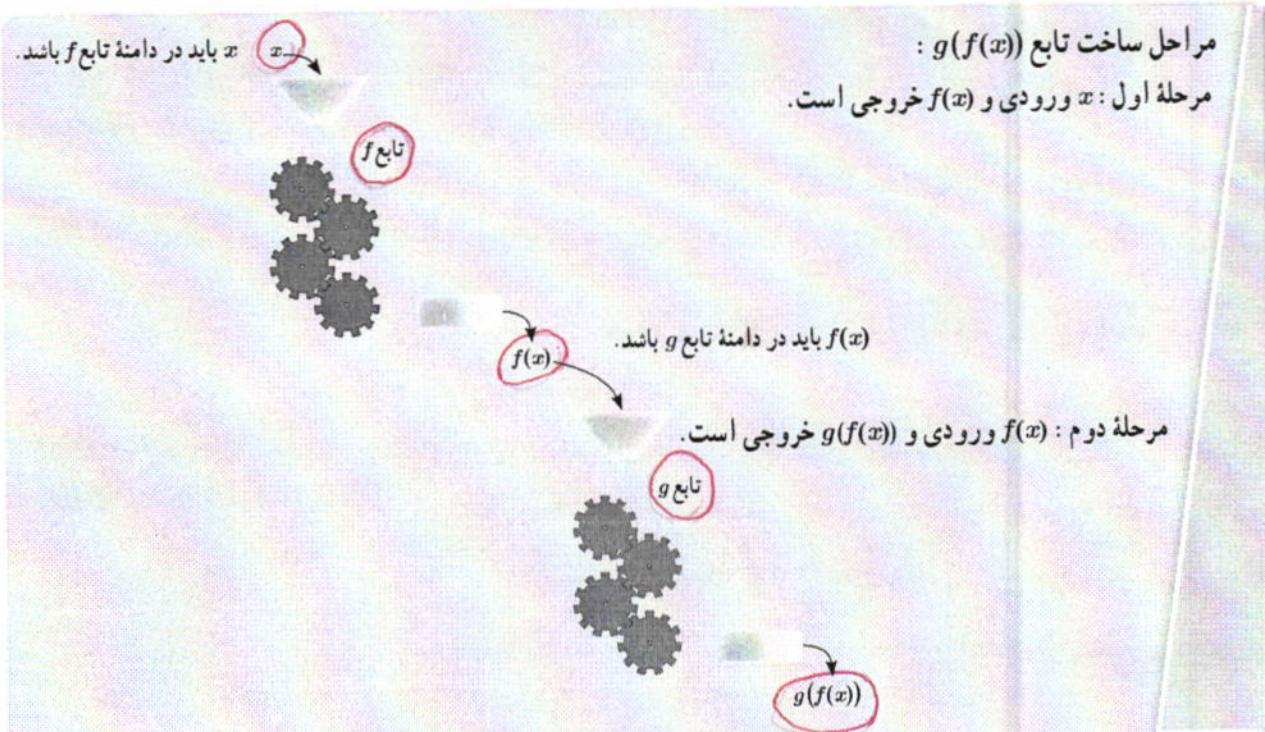
همان طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به دست آورد؟ به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را بر حسب t مشخص کند؟

برای به دست آوردن چنین تابعی به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$n(d(t)) = n(4t + 2) = 2^\circ \cdot (4t + 2)^3 - 8^\circ \cdot (4t + 2) + 50^\circ = 32^\circ \cdot t^3 + 32^\circ \cdot t^2 + 16^\circ \cdot t - 16^\circ - 8^\circ + 50^\circ = 32^\circ \cdot t^3 + 42^\circ \quad 0 \leq t \leq 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.



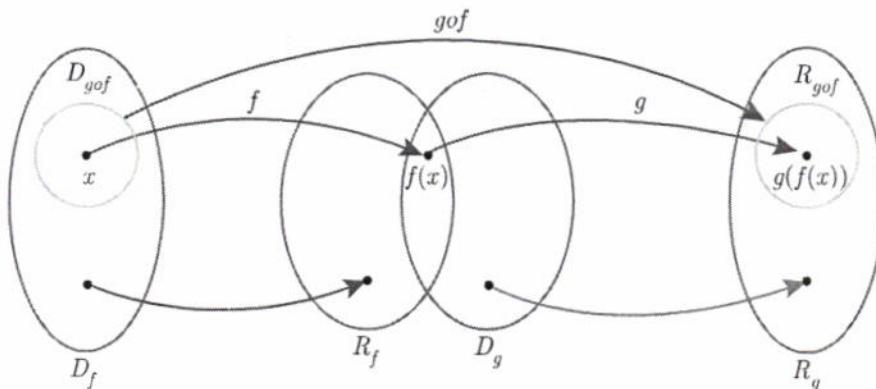
اگر f و g دو تابع باشند به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $(gof)(x) = g(f(x))$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر:

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب gof مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- در دامنه f قرار داشته باشد.

۲- در دامنه g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنه تابع gof را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به صورت مشابه دامنه تابع fog به صورت زیر است:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

و همچنین:

مثال: اگر $f = \{(°, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (2, °), (-1, 4), (5, -7)\}$ را در صورت امکان بنویسید.

$$(gof)(°) = g(f(°)) = g(-1) = 4$$

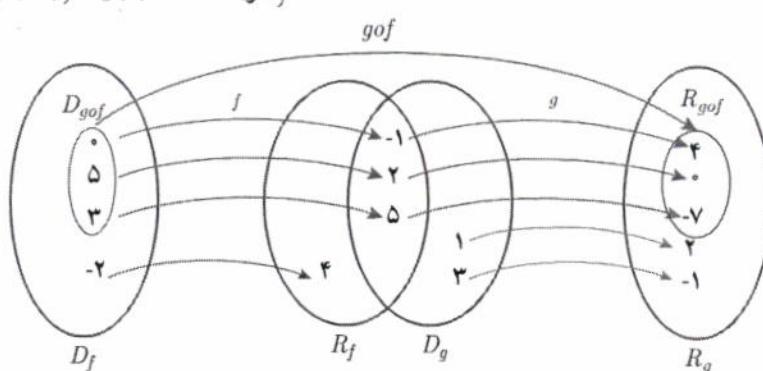
$$(gof)(5) = g(f(5)) = g(2) = °$$

$$(gof)(3) = g(f(3)) = g(5) = -7$$

$$(gof)(-2) = g(f(-2)) = g(4)$$

$$\rightarrow gof = \{(°, 4), (5, °), (3, -7)\}$$

تعريف نشده:



با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

| x | $f(x)$ | x | $g(x)$ |
|-----|--------|-----|--------|
| -۳ | -۷ | -۳ | ۸ |
| -۲ | -۵ | -۲ | ۳ |
| -۱ | -۳ | -۱ | ۰ |
| ۰ | -۱ | ۰ | -۱ |
| ۱ | ۲ | ۱ | ۰ |
| ۲ | ۵ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۵ | ۳ | ۸ |

(الف) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(6) = -1$

(ب) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

(پ) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

(ت) $(gog)(-2) = g(g(-2)) = g(-3) = 8$

(ث) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) =$

(ج) $(fog)(1) = f(f(1)) = f(3) = 0$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x^3 - 1$ ، دامنه و ضابطه تابع gof را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 - 1 = (x-2)^3 - 1$$

مثال: اگر $g(x) = 2x^3 - 1$ ، $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه و ضابطه توابع gof و fog را به دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی باشد یعنی $x-1 \geq 0$ که بازه $[1, +\infty)$ به دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^3 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^3 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^3 - 1 \geq 1$ به این معنی است که عبارت $2x^3 - 1$ متعلق به بازه $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^3 \geq 2$ ، بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{2x^3 - 1 - 1} = \sqrt{2x^3 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطه توابع gof و fog را باهم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر: دامنه تابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطه آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنه تابع gof با توجه به ضابطه آن \mathbb{R} است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{اگر } f(x) = \frac{2}{x-1} \text{ و } g(x) = \frac{3}{x} \text{ ، دامنه و ضابطه توابع } fog \text{ و } fof \text{ را به دست آورید.}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{2}{\frac{x}{x-1}} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

$$\frac{2}{\frac{x}{x-1}} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$$

$$fog(n) = f(g(n)) = \frac{2}{\frac{n}{n-1}} = \frac{2n}{n-1}$$

$$D_{fog} = \{n \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{2}{\frac{n}{n-1}} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

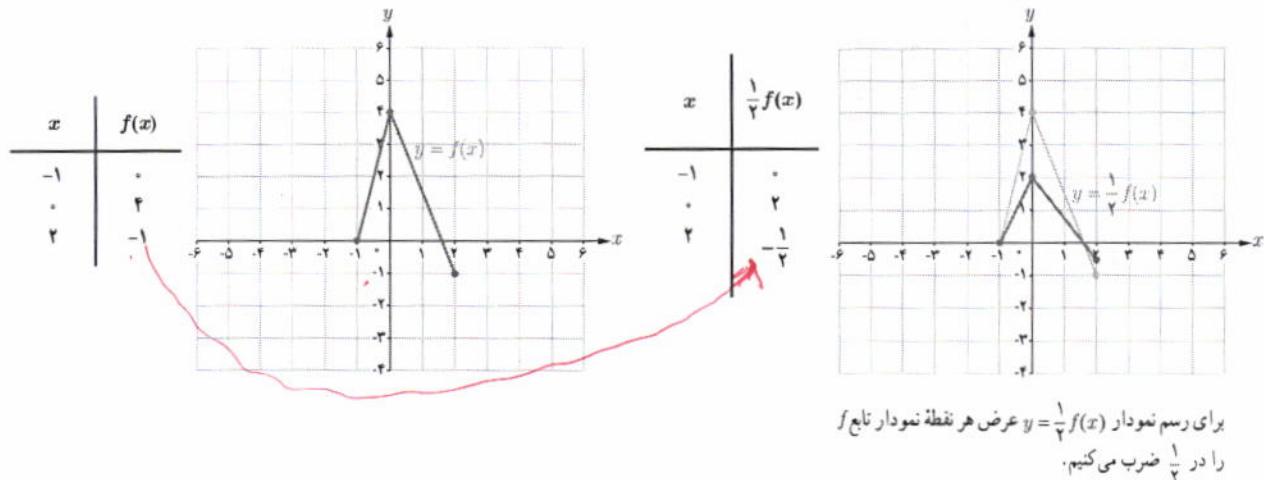
$$\frac{2}{\frac{n}{n-1}} \neq 1 \Rightarrow (\frac{2}{\frac{n}{n-1}} = 1 \Rightarrow n-1=2 \Rightarrow n=3) \Rightarrow n \neq 3$$

$$f_{ff}(n) = \frac{2}{\frac{2n-2}{n-1}} = \frac{2n-2}{n-1}$$

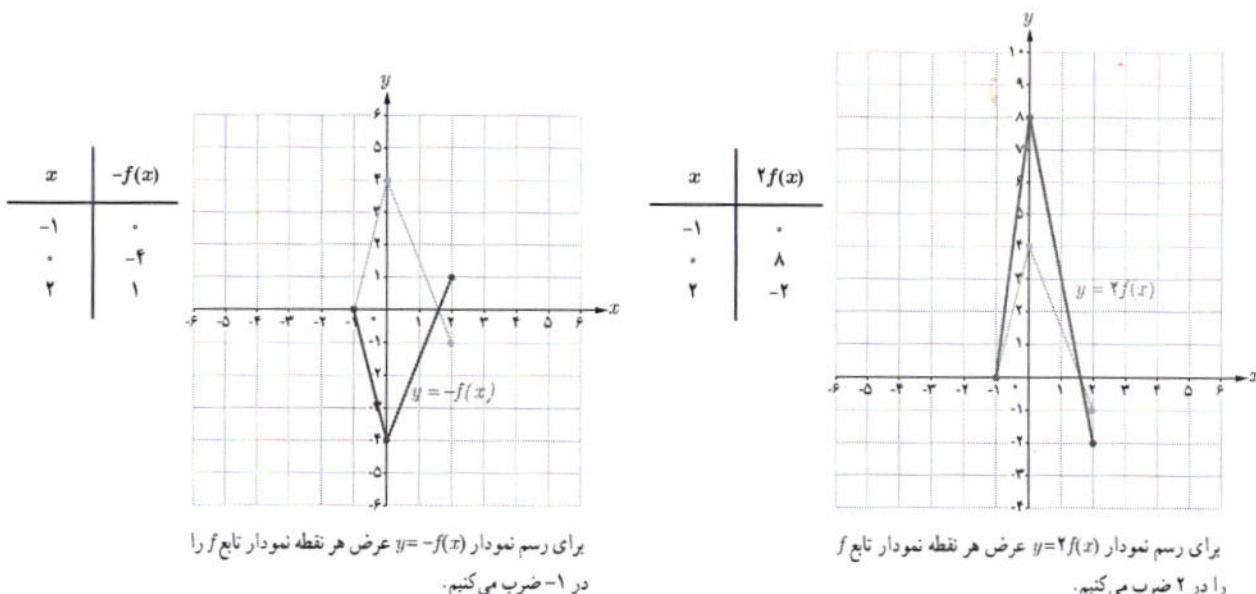
«تبدیل نمودار توابع»

یادآوری: همان‌طور که در پایه یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار تابع $y = \frac{1}{2}f(x)$ و $y = -f(x)$ رسم شده است.

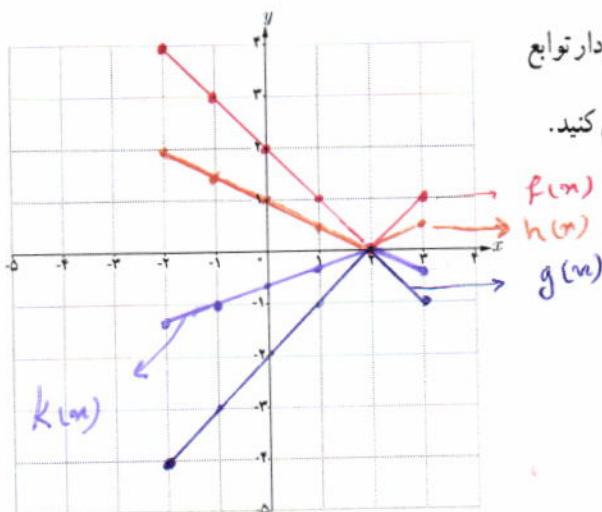


از آنجایی که ریشه‌های معادله $kf(x) = 0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار تابع f و $kf(x)$ با محور x یکسان است.



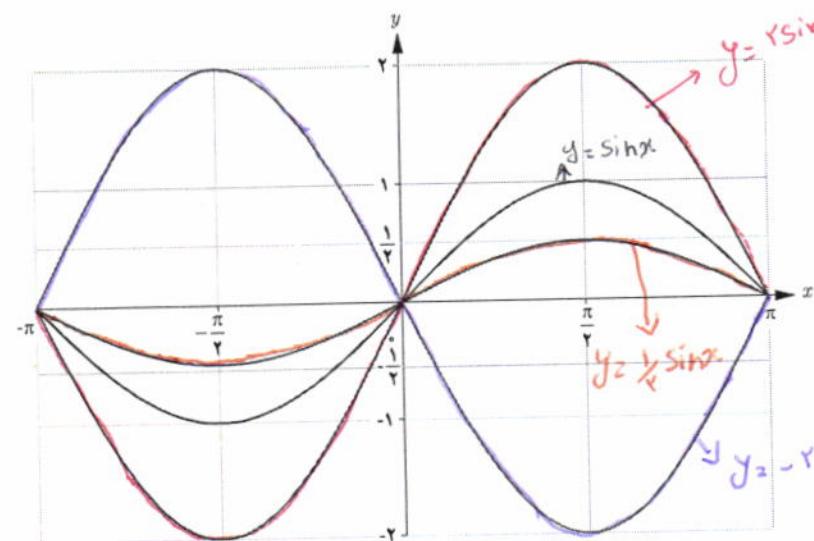
دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.





نمودار تابع $|x - 2|$ را در بازه $[2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع

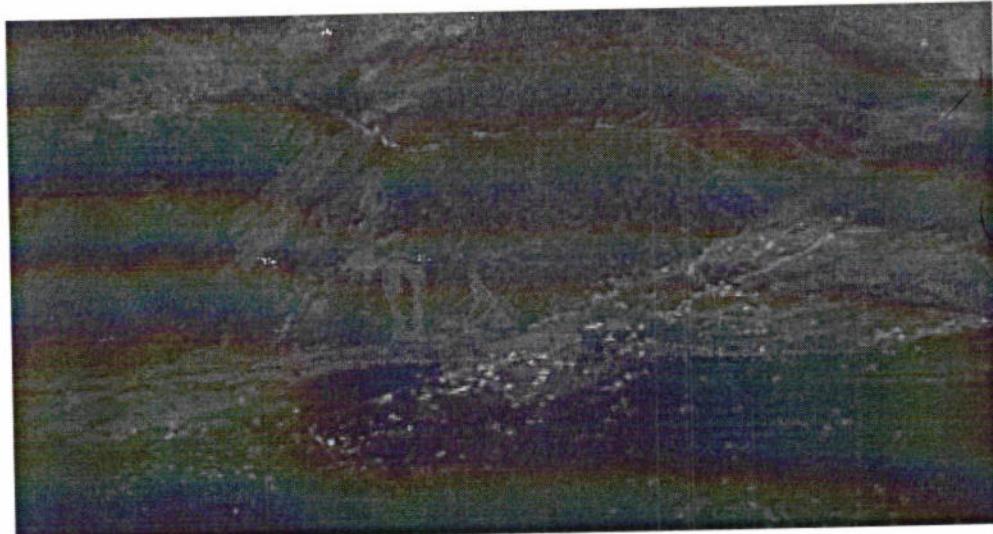
$$k(x) = -\frac{1}{3}|x - 2| \quad h(x) = \frac{1}{3}|x - 2| \quad g(x) = -|x - 2|$$



در شکل رویه رو نمودار توابع با ضابطه های $y = -2 \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \sin x$

$y = \frac{1}{2} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

توابع همیشگیر کنم.
 $y = \frac{1}{2} \sin x$, $y = -2 \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \sin x$
 برای این توابع هر نقطه ای از مجموعه
 تابع $y = \sin x$ را با حفظ
 طول آن نقطه $(2\pi - 2\pi)$
 برابر می کنم.



بیانات تالش

$$y = \frac{1}{2} \sin x \rightarrow \text{برد} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$y = -\frac{1}{2} \sin x \rightarrow \text{برد} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x \rightarrow \text{برد} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

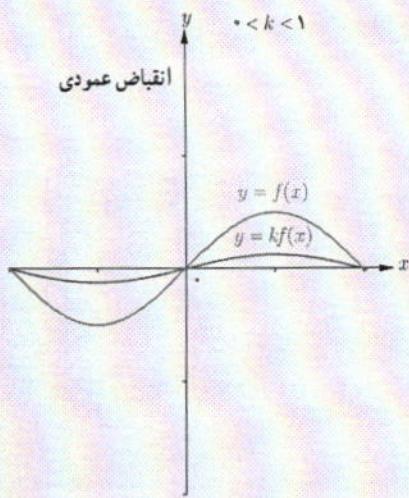
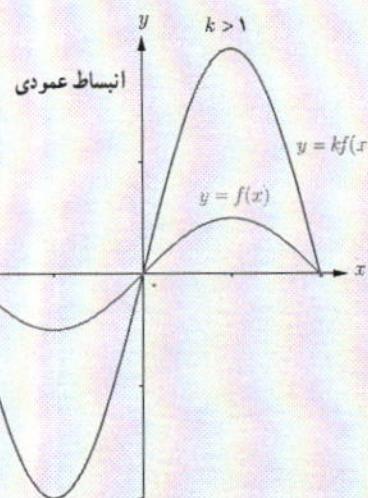
$$y = \sin x \rightarrow \text{برد} = [-1, 1]$$



می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد:

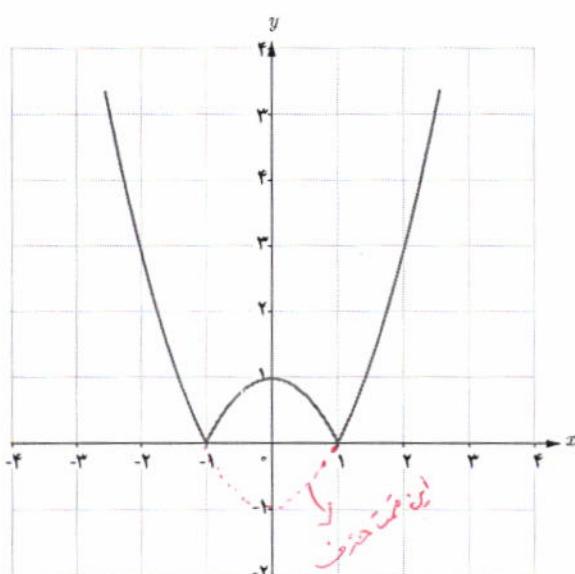
اگر $k > 0$, نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست آورد.

اگر $k < 0$, ابتدا نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود, سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $k > 1$, نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

اگر $k < 1$, نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.



رسم نمودار $|f(x)|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x رسم کنیم.

مثال: در شکل رو به رو نمودار تابع $y = |x^3 - 1|$ رسم شده است.

نمودار از مجموعه ای از نقاط
نمودار از مجموعه ای از نقاط

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$

مثال: تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را بررسی می‌کنیم.

ضابطه تابع $y = f(2x) = 2x + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$-4 \leq 2x \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 0 \rightarrow f(2x) : \text{دامنه } D = [-2, 0]$$

همچنین ضابطه تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 3$ است و دامنه آن به شکل زیر مشخص می‌شود:

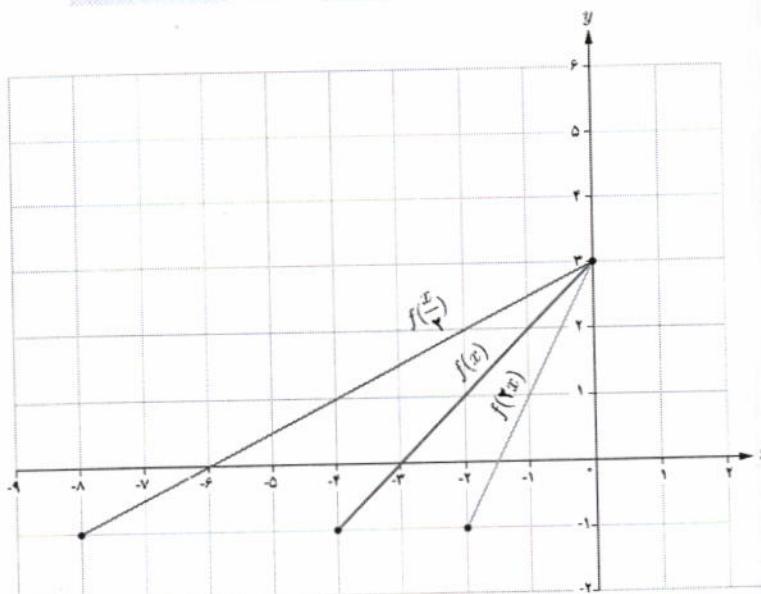
$$-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \rightarrow -8 \leq x \leq 0 \rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) : \text{دامنه } D = [-8, 0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است:

| | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|---|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
| $f(x) = x + 3$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

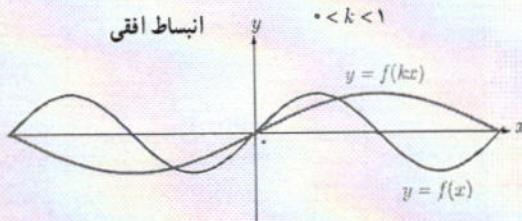
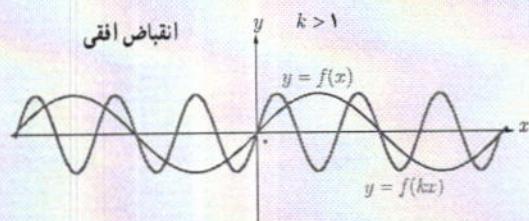
| | | | | | |
|------------------|----|------|----|------|---|
| x | -2 | -1/2 | -1 | -1/2 | 0 |
| $f(2x) = 2x + 3$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|
| x | -8 | -6 | -4 | -2 | 0 |
| $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 3$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(2x)$ و $f\left(\frac{x}{2}\right)$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

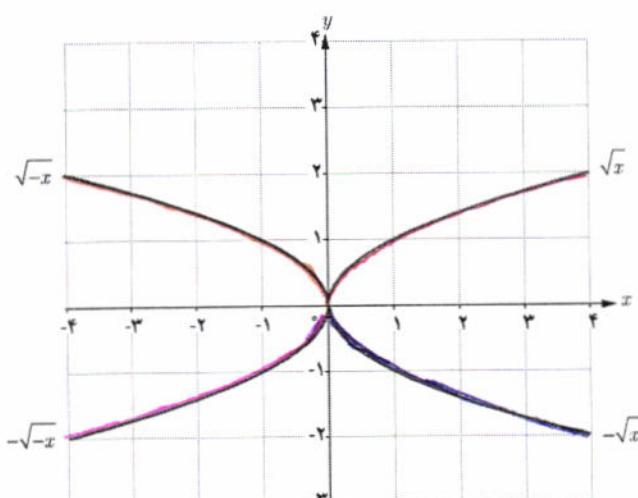
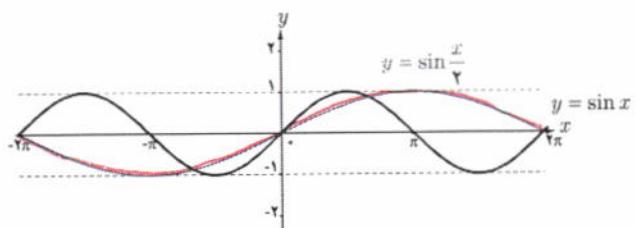
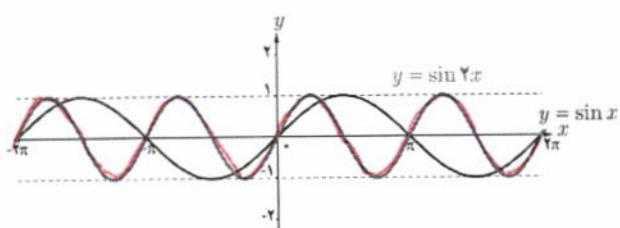
برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$, کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.
 اگر $k > 0$, نمودار $y = f(kx)$ را می‌توان با انقباض یا انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x به دست آورد.
 اگر $k < 0$, ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها فرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $k > 1$ نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

اگر $0 < k < 1$, نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

مثال: در شکل‌های زیر نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \sin 2x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y = \sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y = \sin x$ در امتداد محور x و نمودار تابع $y = \sin x$ در امتداد محور x با انبساط نمودار تابع $y = \sin x$ در امتداد محور x به دست آمده است.



نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

$$y = \sqrt{x} \quad D = [0, +\infty) \quad R = [0, +\infty)$$

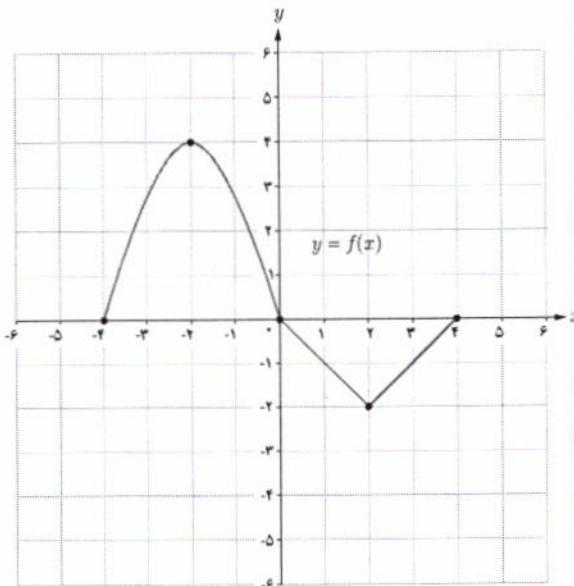
$$y = -\sqrt{x} \quad D = [0, +\infty) \quad R = (-\infty, 0]$$

$$y = \sqrt{-x} \quad D = (-\infty, 0] \quad R = [0, +\infty)$$

$$y = -\sqrt{-x} \quad D = (-\infty, 0] \quad R = (-\infty, 0]$$

نمودار تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

| x | $f(x)$ |
|-----|--------|
| -4 | 0 |
| -2 | 4 |
| 0 | 0 |
| 2 | -2 |
| 4 | 0 |



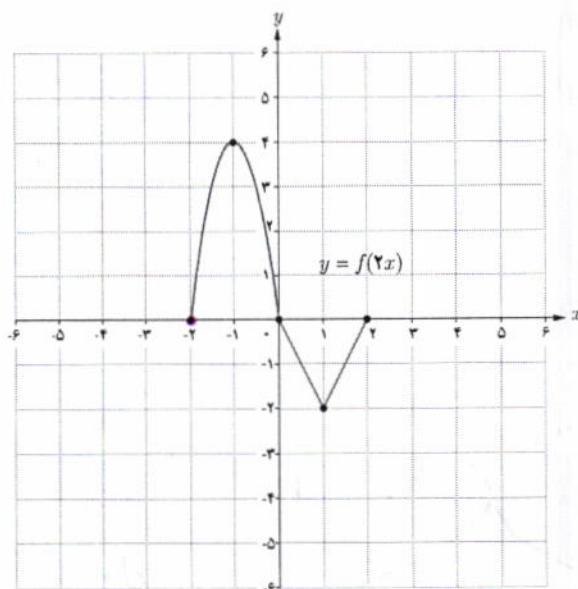
الف) برای تعیین دامنه $y = f(2x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

بنابراین دامنه تابع $y = f(2x)$ بازه $[-2, 2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $y = f(2x)$, طول نقاط یا همان x ‌ها باید محاسبه شود.

| x | $2x$ | $f(2x)$ | $(x, f(2x))$ |
|-----|------|---------|--------------|
| -2 | -4 | 0 | (-2, 0) |
| -1 | -2 | 4 | (-1, 4) |
| 0 | 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 2 | -2 | (1, -2) |
| 2 | 4 | 0 | (2, 0) |

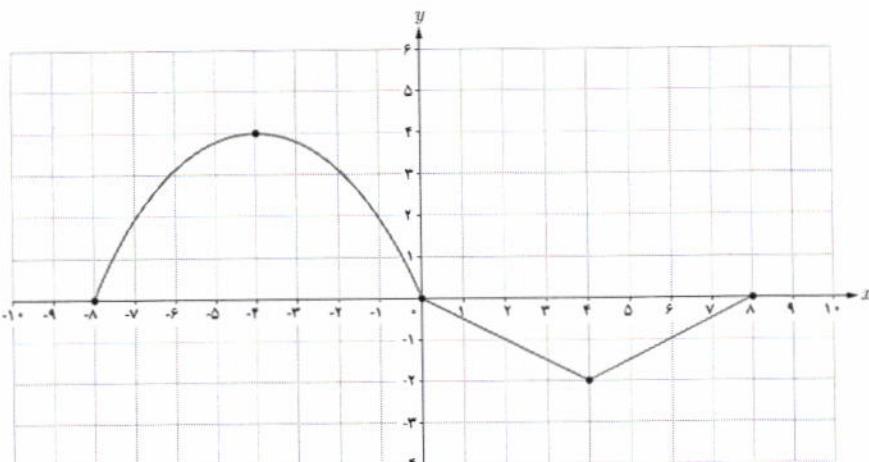


ب) برای تعیین دامنه $y = f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$$

پس دامنه تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ بازه $[-8, 8]$ است و نقاط متناظر به صورت زیر است:

| x | $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ |
|-----|------------------------------|
| -8 | 0 |
| -4 | 4 |
| 0 | 0 |
| 4 | -4 |
| 8 | 0 |



همان طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y = f(2x)$ طول هر نقطه نمودار $y = f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ طول هر نقطه را در 2 ضرب می‌کنیم.

دامنه تابع $y = f(kx)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ الزاماً يکسان نیست ولی برد تابع $y = f(kx)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

خواندنی

فرش بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهن‌سال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نفس‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.



۱ اگر $\{(5,7), (3,5), (7,9), (9,11)\}$ و $f = \{(7,8), (5,3), (9,8), (11,4)\}$ باشد fog و fog را به دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{fog}, (fog)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{fog}, (fog)(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^3 - 16}$: $D_{gof}, (gof)(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{gof}, (gof)(x)$

۳ اگر $f(x) = 3x - 4$ و $f(g(x)) = 3x^3 - 8x + 14$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $x^3 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^3 - 4}$ باشند آنگاه $(fog)(5) = -25$. نادرست

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(gof)(x) = (fog)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. نادرست

ب) اگر $5 = f(4)$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $5 = f(7)$. درست

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x-1$ باشند آنگاه $(fog)(5) = g(2)$. درست

۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برنده کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x) = (3x^3 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$
 ب) $k(x) = x^5$; $l(x) = 3x^3 - 4x + 1$

$$fog(n) = \sqrt[3]{3n^3 - 4n + 1} \quad gof(n) = 3(\sqrt[3]{n})^3 - 4(\sqrt[3]{n}) + 1$$

$$k \circ l(n) = (3n^3 - 4n + 1)^5 \quad l \circ k(n) = 3(n^5)^3 - 4(n^5) + 1$$

۷ هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ $= fog(n) \left\{ \begin{array}{l} f(n) = \sqrt[n]{n+1} \\ g(n) = n^3 \end{array} \right.$ $\therefore \left\{ \begin{array}{l} f(n) = \sqrt[n]{n+1} \\ g(n) = n^3 \end{array} \right.$

ب) $l(x) = \sqrt{x^3 + 5}$ $\left\{ \begin{array}{l} f(n) = \sqrt{n+5} \\ g(n) = n^3 \end{array} \right.$ $\therefore \left\{ \begin{array}{l} f(n) = \sqrt{n+5} \\ g(n) = n^3 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(n) = \sqrt{n+5} \\ g(n) = n^3 \end{array} \right.$$

$$fog(n) = \sqrt{n^3 + 5}$$

$$2212 \quad \text{c) } f(n) = \sin(n) \quad g(n) = \sqrt{n} \quad D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [0, +\infty) \quad (3)$$

$$D_{gof} = \left\{ n \in \mathbb{R} \mid \sin(n) \in [0, +\infty) \right\} = [2k\pi, (2k+1)\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\sin(n) \geq 0 \quad \xrightarrow{\text{مدى دالة}} \quad \pi \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$g \circ f(n) = \sqrt{f(n)} = \sqrt{\sin n}$$

$$f(n) = 3n - 4 \quad f(g(n)) = 3n^2 - 4n + 1 \quad g(n) = ?$$

$f(g(n)) = 3(g(n)) - 4$

$$3(g(n)) - 4 = 3n^2 - 4n + 1 \quad 3(g(n)) = 3n^2 - 4n + 1 + 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{g(n) = n^2 - 4n + 4}$$

| | | | |
|--|---|---|---|
| \hookrightarrow $f(n) = 3n$ $f(g(n)) = f(g(2))$ $= f(2) = 6$ $g(2) = 2(2) - 1 = 3$ | \hookrightarrow $g(n) = 2n$ $f(g(n)) = f(g(2))$ $= f(2) = 6$ | \checkmark نادرست $f(n) = 3n$ $g(n) = 2n$ $fog(n) = g \circ f(n) = 4n$ | انت نادرست $fog(n) = f(g(n))$ $= f(\sqrt{n})$ $= 4n$ كرده يافی دوره دوم استان خوزستان |
|--|---|---|---|

$$f(n) = n - 100000 \quad \text{تحقيق نفس}$$

$$g(n) = n - 100000 \quad \text{تحقيق نفس}$$

$$\text{ا) } gof(n) = g(f(n)) =$$

$$gof(100000) = 100000(100000) - 100000 = 10000000 - 100000 = 9900000$$

$$\therefore fog(n) = f(g(n)) = 100000(n - 100000) = 100000n - 10000000$$

$$fog(100000) = 100000(100000) - 100000 = 10000000 - 100000 = 9900000$$

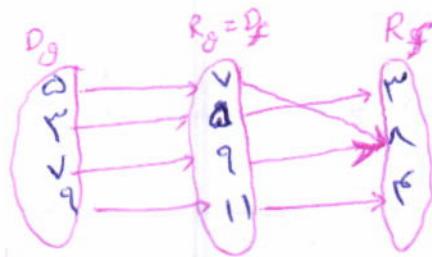
در حالت انت ففع انت؛ بستر است

نماینده های ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ در تعریف های حل سه مورد است

میریم های معرفه های (۱) مقدار ۲۳، ۲۲

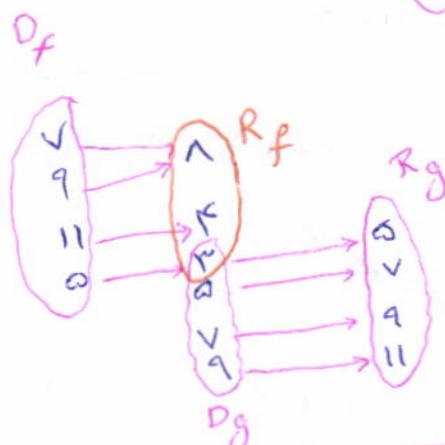
$$f\{(v, \wedge), (\wedge, \vee), (q, \wedge), (11, \wedge)\} \quad g = \{(a, v), (v, a), (v, q), (q, 11)\}$$

$$f \circ g = \{(a, \wedge), (v, \vee), (v, \wedge), (q, \wedge)\}$$



$$g \circ f = \{(a, \wedge)\}$$

گروه ریاضی دوره دهم
اسستان خوزستان



$$\text{ا) } f(n) = n^2 - a \quad g(n) = \sqrt{n+4} \quad D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [-4, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ n \in [-4, +\infty) \mid \sqrt{n+4} \in \mathbb{R} \right\} = [-4, +\infty)$$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = (\sqrt{n+4})^2 - a = n+4-a = n+1$$

$$\text{ب) } f(n) = \sqrt{4-n} \quad g(n) = \frac{4}{n-a} \quad D_f = (-\infty, \frac{4}{a}) \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{a} \right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{a} \right\} \mid \frac{4}{4-n-a} \in (-\infty, \frac{4}{a}) \right\} = [4, +\infty)$$

$$\frac{4}{4-n-a} \leq \frac{4}{a} \Rightarrow \frac{4}{4-a} \leq \frac{4}{a} \Rightarrow \frac{4-a}{4} \geq 1 \Rightarrow 4-a \geq 4 \Rightarrow a \geq 0$$

$$n \in [4, +\infty)$$

$$f \circ g(n) = \sqrt{4 - 4\left(\frac{4}{n-a}\right)} = \sqrt{\frac{4n-16-16}{n-a}} = \sqrt{\frac{4n-16}{n-a}}$$

$$\text{ج) } f(n) = \sqrt{n+r} \quad g(n) = \sqrt{n-14} \quad D_f = [-r, +\infty) \quad D_g = (-\infty, 14] \cup [r, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ n \in [-r, +\infty) \mid \sqrt{n+r} \in (-\infty, 14] \cup [r, +\infty) \right\} = [14, +\infty)$$

$$\sqrt{n+r} \leq -r \Rightarrow n+r \leq r \Rightarrow n \leq 0$$

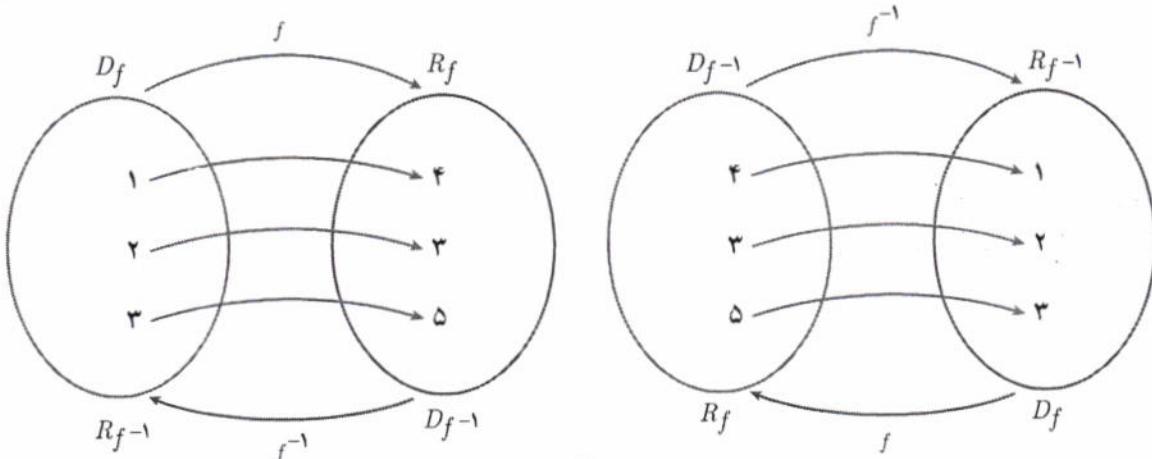
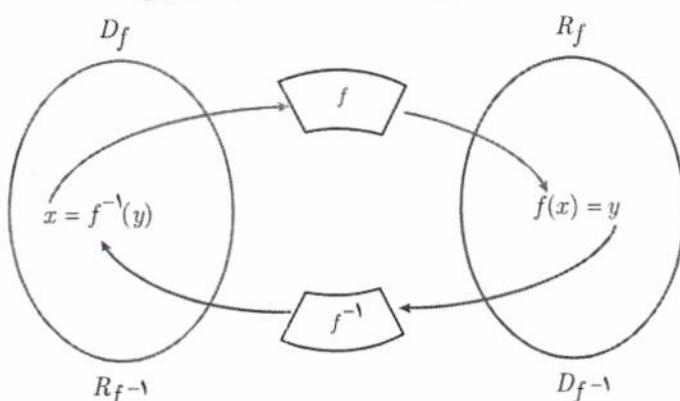
$$g \circ f(n) = \sqrt{(n+r)^2 - 14} = \sqrt{n+r-14} = \sqrt{n-14}$$

$$\sqrt{n+r} \geq r \Rightarrow n+r \geq r \Rightarrow n \geq 0 \Rightarrow [14, +\infty)$$

همچنین :

$$\begin{cases} (f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \\ (f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3 \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f داریم :به طور کلی اگر f تابع یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.اگر f تابع وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x & ; & x \in D_{f^{-1}} \\ f^{-1}(f(x)) &= x & ; & x \in D_f \end{aligned}$$

تجزیه
دسته

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

$$(f \circ g)(x) = x ; x \in D_g$$

$$(g \circ f)(x) = x ; x \in D_f$$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال: نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = \frac{x+4}{3}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$

در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x

را به دست می آوریم.

کار در کلاس

آیا تابع $y = x^3$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $y = x^3$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه تابع وارون چیست؟

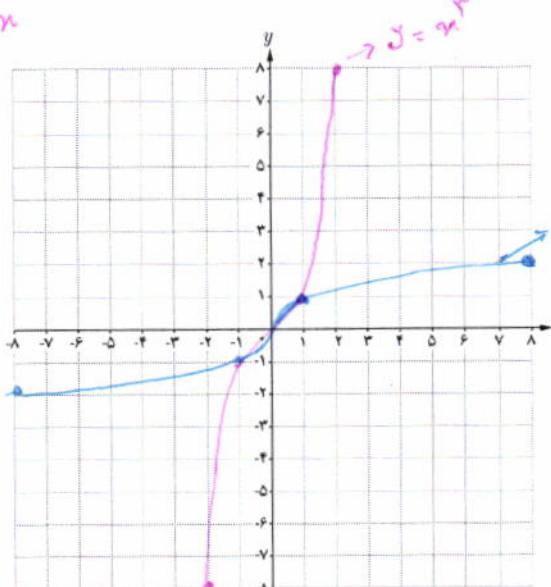
$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y} = y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$



$$D_f = \mathbb{R}$$

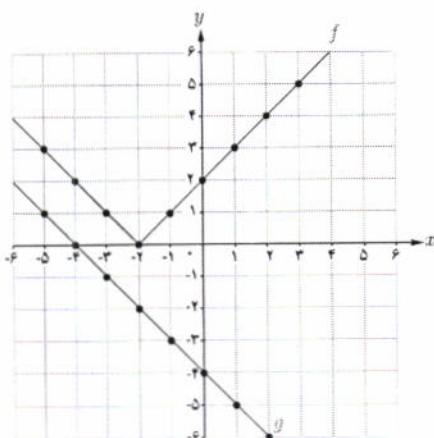
$$R_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

سیم اکثر تابع یک به یک است

۱- نوع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دوم، $\sqrt{ax+b}$ و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.



با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بباید.

الف) $(f \circ g)(-1) = f(-2) = 1$

ب) $(g \circ f)(0) = g(2) = 1$

پ) $(f \circ g)(1) = f(1) = 2$

ت) $(g \circ f)(-1) = g(-1) = -2$

$g \circ f(x)$ وجود ندارد سیمه است

با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^2 - 3x + 1 : (f \circ g)(x) = 4$

$$2(x^2 - 3x + 1) - 5 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 3 = 0 \quad (x-1)(x-3) = 0 \quad x=1, x=3$$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g(x) = 1 - 2x : (g \circ f)(x) = -5$

$$1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5 \Rightarrow -6x^2 - 2x + 3 = -5 \Rightarrow -6x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \quad *$$

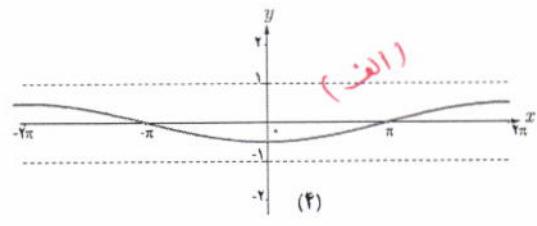
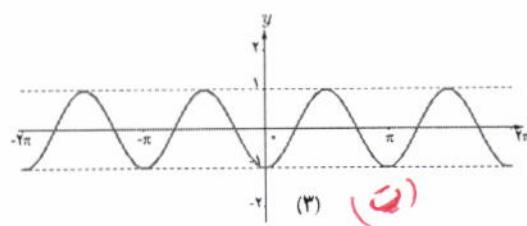
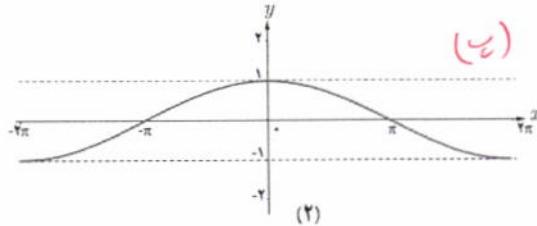
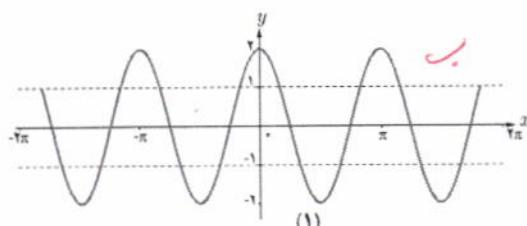
با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار تابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x) \quad (1)$

ب) $y = 2 \cos 2x \quad (2)$

پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x) \quad (3)$

ت) $y = -\cos 2x \quad (4)$



نمودار تابع $y = \sin x$ و $y = -\sin x$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

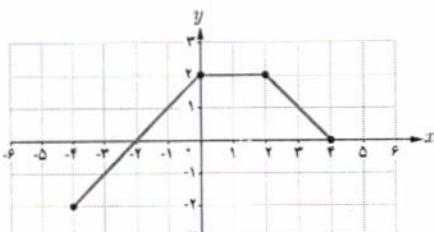
با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$



۲۳

$$\Delta = (1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1 + 7}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1 - 7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

اراضی سران ۹ مسأله (ب)

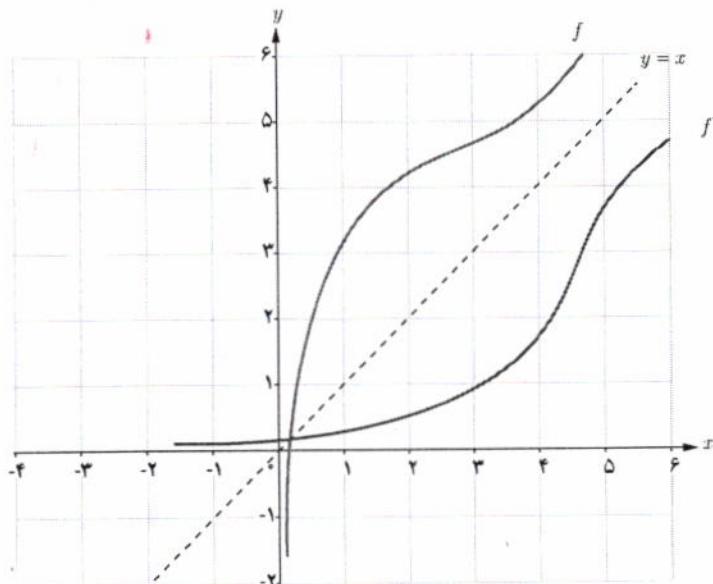
تابع وارون

بادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جایه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f ، تابعی جدید به دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $x = y$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 3)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (f \circ f^{-1})(4) = f(f^{-1}(4)) = f(1) = 4 \\ (f \circ f^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(2) = 3 \rightarrow f \circ f^{-1} = \{(4, 4), (3, 3), (5, 5)\} \\ (f \circ f^{-1})(5) = f(f^{-1}(5)) = f(3) = 5 \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} داریم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$\text{Q11} \Rightarrow g(n) = -n^r \Rightarrow \begin{cases} g(n) = -n^r & n > 0 \rightarrow [0, +\infty) \\ g(n) = -n^r & n \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0] \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow h(n) = n^r + \epsilon n + r \Rightarrow h(n) = (n^r + r) - 1 \quad n = -r$$

$$\therefore n_0 = -\frac{b}{ra} = \frac{-\epsilon}{r(1)} = -r$$

$$\begin{cases} h(n) = n^r + \epsilon n + r & n \leq -r \\ h(n) = n^r + \epsilon n + r & n > -r \end{cases} \quad (-\infty, -r] \quad [-r, +\infty)$$

نیست سده بزرگترین باره
بر این دلایل بودن توابع اس مسئان
از مجموعه اس از هر کدام از اینها را معرف نمی‌نماییم.
باشند

$$f(n) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline n & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline f(n) & -3 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} \Leftarrow f(n) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline n & -r & -1 & 1 & r & \\ \hline f(n) & -r^r & -1 & 1 & r^r & \\ \hline \end{array} \quad \text{از درس عودا} \quad \textcircled{1}$$

$$(n, y) \in f(n) \Rightarrow (y, n) \in f^{-1}(n)$$

$$f(n) = n^r - \epsilon n + \omega \Rightarrow f(n) = n^r - \epsilon n + r - \epsilon + \omega = (n-r)^r + 1$$

$$R_f = [1, +\infty)$$

نیست سده بزرگترین باره
از این مجموعه های بازیست $(-\infty, r] \subseteq [r, +\infty)$

$$y = (n-r)^r + 1 \Rightarrow y-1 = (n-r)^r \Rightarrow \pm \sqrt[r]{y-1} = n-r \Rightarrow$$

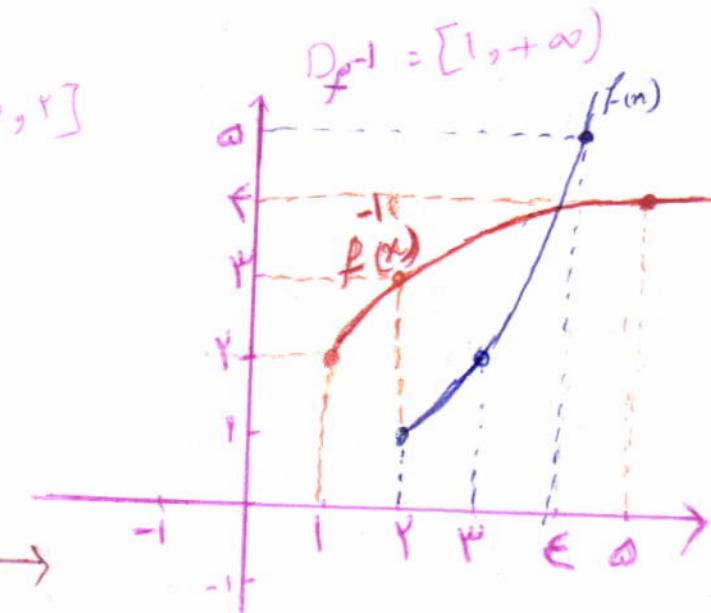
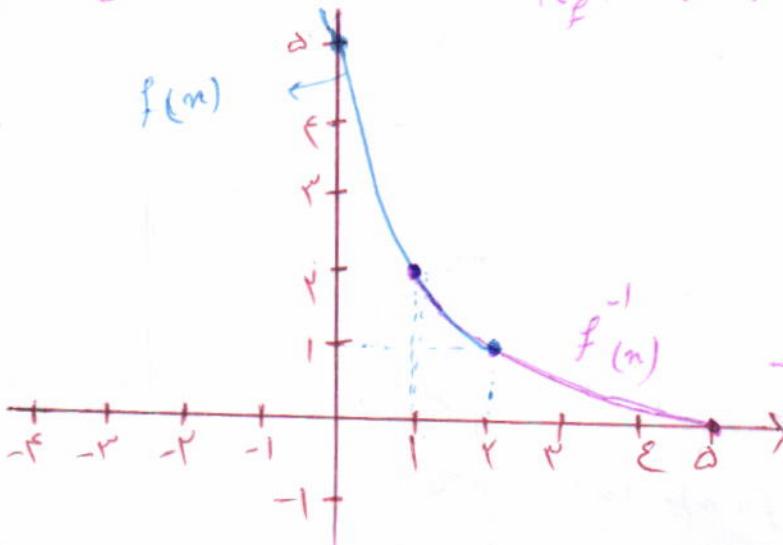
$$n = \pm \sqrt[r]{y-1} + r \quad \begin{cases} n > r \\ n \leq r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = +\sqrt[r]{y-1} + r &\Rightarrow f^{-1}(n) = \sqrt[r]{n-1} + r \\ y = -\sqrt[r]{y-1} + r &\Rightarrow f^{-1}(n) = -\sqrt[r]{n-1} + r \end{aligned}$$

$$D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$\textcircled{1} R_{f^{-1}} = [r, +\infty)$$

$$\textcircled{2} R_{f^{-1}} = (-\infty, r]$$



تمام ماتری صفحه ۲۹ مسکو کتاب ریاضی (۳)

۱) (۱) $f(n) = \frac{-\lambda n + r}{r} \Rightarrow y = -\frac{\lambda n + r}{r} \Rightarrow ry = -\lambda n + r \Rightarrow ry - r = -\lambda n$
 $\frac{ry - r}{-\lambda} = n \Rightarrow \frac{-ry + r}{\lambda} = n \Rightarrow \frac{-ry + r}{\lambda} = y \Rightarrow f^{-1}(n) = \frac{-rn + r}{\lambda}$

(۲) $g(n) = -\alpha - \sqrt{rn+1} \Rightarrow y = -\alpha - \sqrt{rn+1} \Rightarrow y + \alpha = -\sqrt{rn+1} \Rightarrow$
 $(y + \alpha)^r = (-\sqrt{rn+1})^r \Rightarrow (y + \alpha)^r = rn+1 \Rightarrow (y + \alpha)^r - 1 = rn \Rightarrow$
 $\frac{(y + \alpha)^r - 1}{r} = n \Rightarrow \frac{(n+\alpha)^r - 1}{r} = n \Rightarrow g^{-1}(n) = \frac{(n+\alpha)^r - 1}{r}$
گروه ریاضی دوره ۲۰م اسما خوزستان

(۱) $f(n) = -\frac{v}{r}n - r, g(n) = -\frac{rn+y}{v}$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = -\frac{v}{r}\left(-\frac{rn+y}{v}\right) - r = rn + r - r = rn$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = -\frac{r(-\frac{vn+r}{r}) + y}{v} = -\frac{-vn - r + y}{v} = rn$$

$$g \circ f(n) = f \circ g(n) = rn \Rightarrow \text{داروں بینوں } g \circ f$$

(۲) $f(n) = -\sqrt{n-r}, g(n) = n + r^n, n \leq 0$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = -\sqrt{(n+r^n)-r} = -\sqrt{n^r} = -|n| = -(-n) = rn$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = n + (-\sqrt{n-r})^r = n + n - r = rn$$

$$g \circ f(n) = f \circ g(n) = rn \Rightarrow \text{داروں بینوں } g \circ f$$

(۳) $f(x) = \frac{q}{d}x + r^d \Rightarrow y = \frac{q}{d}x + r^d \Rightarrow y - r^d = \frac{q}{d}x \Rightarrow$

$$(y - r^d)\frac{q}{d} = x \Rightarrow \frac{q}{d}y - \frac{r^d}{d} = x \Rightarrow \frac{q}{d}x - \frac{r^d}{d} = y \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{q}{d}x - \frac{r^d}{d} \Rightarrow \text{داروں بینوں } f^{-1}(x)$$

(۴) $f(n) = |n| \Rightarrow \begin{cases} f(n) = |n| & n \geq 0 \\ f(n) = -n & n \leq 0 \end{cases}$

$$\textcircled{c}) g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = g^{-1}(4\epsilon) = \epsilon$$

$$f(n) = a \Rightarrow \frac{1}{n} n - 1 = a \Rightarrow \frac{1}{n} n = a \Rightarrow n = 4\epsilon \Rightarrow f^{-1}(a) = 4\epsilon$$

$$g(n) = 4\epsilon \Rightarrow n^4 = 4\epsilon \Rightarrow n = \epsilon$$

(الف) $f \circ g(n) = \frac{1}{n} n^4 - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{n} n^4 - 1 \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{n} n^4 \Rightarrow$
 $n(y + 1) = n^4 \Rightarrow \sqrt[n]{n(y + 1)} = n \Rightarrow \sqrt[n]{n+1} = y \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(n) = \sqrt[n]{n+1}$



عکس: بختیار زنجیری

روستای رهی داغلار - آذربایجان شرقی

$$\textcircled{d}) \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(a) = \sqrt{n(a) + 1} = \sqrt{4\epsilon} = \epsilon$$

$$\textcircled{e}) f^{-1}(n) = n + 1 \quad f^{-1} \circ f^{-1}(n) = n(n + 1) + 1 = 4\epsilon n + 1\epsilon$$

$$f^{-1} \circ f^{-1}(4) = 4\epsilon(4) + 1\epsilon = 4\epsilon^2 + 1\epsilon = 400$$

$$\textcircled{f}) g(n) = n^4 \Rightarrow y = n^4 \Rightarrow \sqrt[n]{y} = n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = y$$

$$g^{-1}(n) = \sqrt[n]{n}, \quad f^{-1}(n) = n + 1$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(n) = g^{-1}(f^{-1}(n)) = \sqrt[n]{n + 1} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(a) = \sqrt[n]{a + 1} = \sqrt[4]{4\epsilon} = \epsilon$$

$$f \circ g^{-1}(n) = g^{-1} \circ f^{-1}(n)$$

از این ترتیب نتیجه می‌یابیم

۱) ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x) = \frac{-\lambda x + 3}{2}$
 (ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

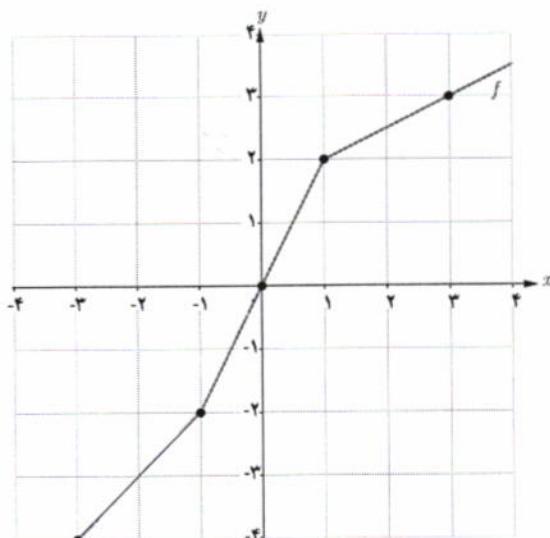
(الف) $f(x) = \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma}} x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{\sqrt{\gamma}}$
 (ب) $f(x) = -\sqrt{x-\lambda}$, $g(x) = \lambda + x^2; x \leq 0$.

۲) رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f(x)$ میزان درجه فارنهایت است. f^{-1} را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

۳) توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها به دو روش متفاوت توابعی یک به یک بسازید.

(الف) $f(x) = |x|$
 (ب) $g(x) = -x^2$
 (ب) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۴) از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



| | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| x | -4 | -2 | 2 | 2 |
| $f^{-1}(x)$ | ... | ... | ... | ... |

۵) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

اگر $y = \frac{1}{\lambda}x - 3$ و $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.
 (الف) $(fog)^{-1}(5)$ (ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(5)$ (پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

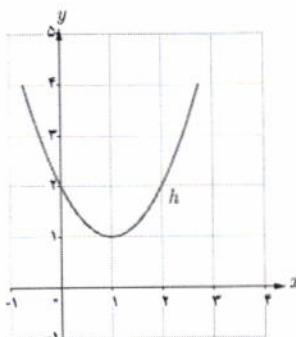
روش اول

۲۹

(الف) $f \circ g^{-1}(a) \Rightarrow f(g(a)) = a$ (ب) $f^{-1} \circ f^{-1}(4) = f^{-1}(f^{-1}(4)) = f^{-1}(72) = 400$

$f(x) = 4 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x - 3 = 4 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = 7 \Rightarrow x = 7\lambda \Rightarrow f^{-1}(4) = 7\lambda$
 $f(x) = 72 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x - 3 = 72 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = 75 \Rightarrow x = 75\lambda \Rightarrow f^{-1}(72) = 75\lambda$

صفحه بعد



مثال: نمودار تابع $h(x) = x^3 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنه این تابع آن را طوری محدود کرد که تابع یک به یک په دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^3 - 2x + 2 = (x-1)^3 + 1$$

منلاً دامنه تابع h را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطه تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطه $h(x)$ برابر است اما دامنه تابع h مجموعه اعداد حقیقی و دامنه تابع k بازه $[1, +\infty)$ است. در تابع k , x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-1)^3 + 1$$

$$y = (x-1)^3 + 1$$

$$(x-1)^3 = y-1$$

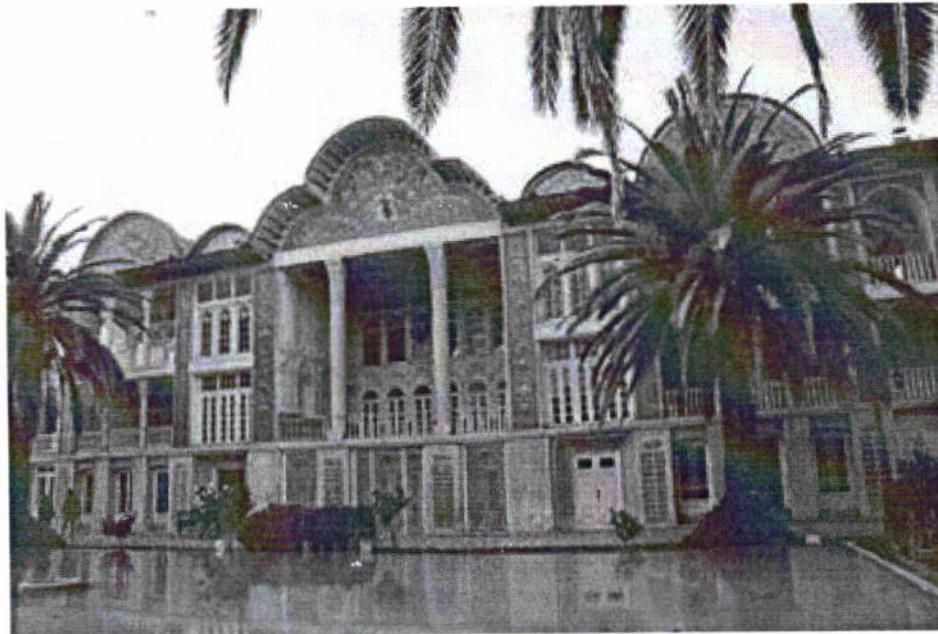
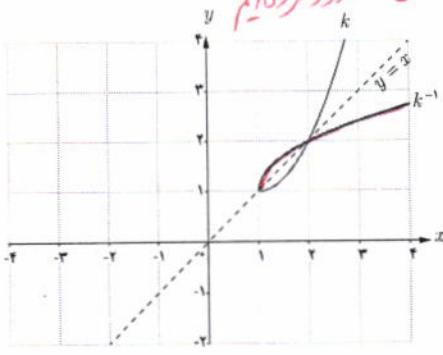
$$x-1 = \pm \sqrt[3]{y-1}$$

$$x = \pm \sqrt[3]{y-1} + 1$$

$$k^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟) حون دامنه h , اب هزاره $(1, +\infty)$ [محروم در راه]

نمودار توابع k و k^{-1} به صورت زیر است:



باغ ارم شیراز

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$, دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید.
تابع f یک به یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

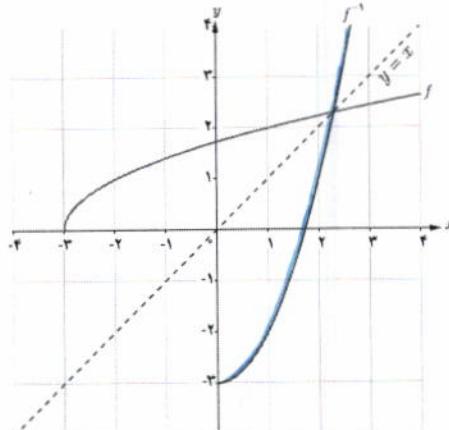
$$f^{-1}(y) = y^2 - 3$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

* $D_{g^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_{g^{-1}} = [1, +\infty)$

$$D_f = R_f = \mathbb{R}$$



کار در کلاس

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

ضابطه تابع وارون تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

$D_g = [x_0, +\infty)$ الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

پ) $h(x) = x^2 + 1$

چ) $[-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \subseteq h(x)$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2$

$\Rightarrow \sqrt{y-1} = x \Rightarrow \sqrt{y-1} = y$

$\Rightarrow -\sqrt{y-1} = x \Rightarrow -\sqrt{y-1} = y$

از سال قبل می دانیم که اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک

به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $(0, +\infty)$ و یا $[0, +\infty)$ یا زیرمجموعه هایی

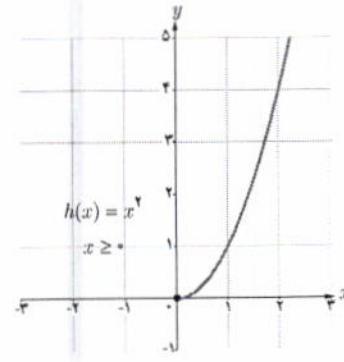
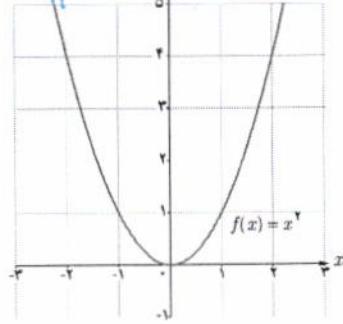
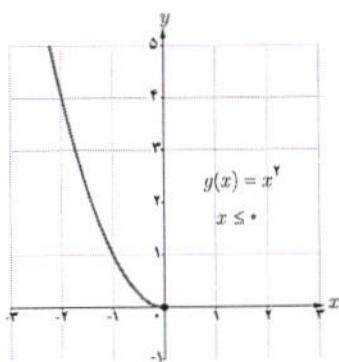
از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می آید.

$$D_{h^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$R_{h^{-1}} = [-\infty, 0]$$

محدود کردن دامنه تابع

$$R_{h^{-1}} = [-\infty, 0]$$



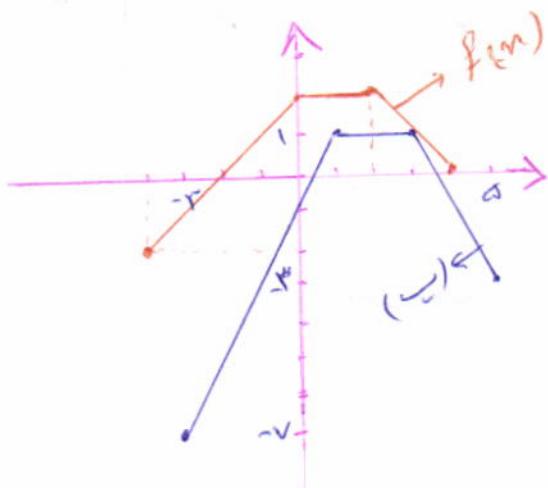
$$\text{c)} \quad y = r f(n-1) - r$$

$$y = \begin{cases} r[-(n-1)+r] - r = -rn + r \\ r(r) - r = 1 \\ r[(n-1)+r] - r = rn - r \end{cases}$$

$$r \leq n \leq \infty \iff r \leq n-1 \leq \infty$$

$$1 \leq n < r \iff 0 < n-1 < r$$

$$-r \leq n \leq 1 \iff r \leq n-1 \leq 0$$



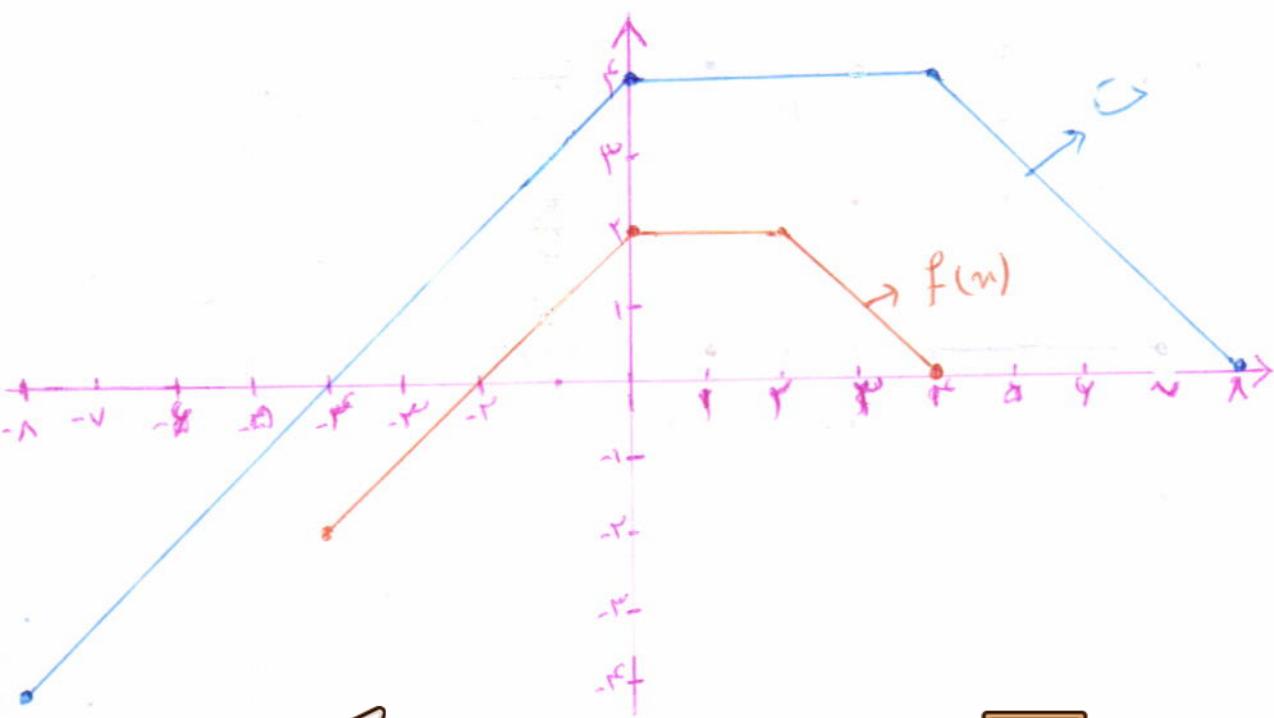
$$\text{c)} \quad y = r f(\frac{1}{r}n)$$

$$y = \begin{cases} r(-\frac{1}{r}n + r) = -n + r \\ r(r) = r \\ r(+\frac{1}{r}n + r) = n + r \end{cases}$$

$$-\infty \leq n \leq r \iff -\infty \leq \frac{1}{r}n \leq r$$

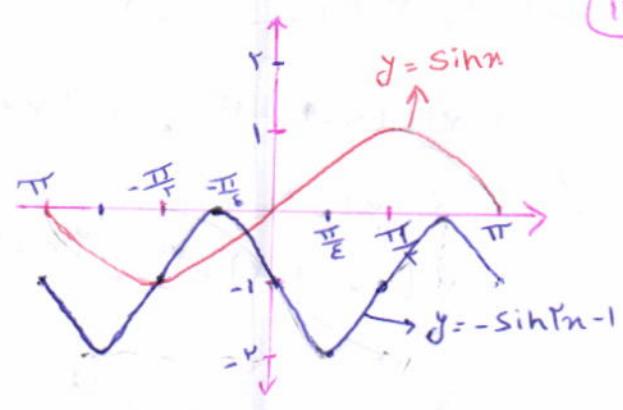
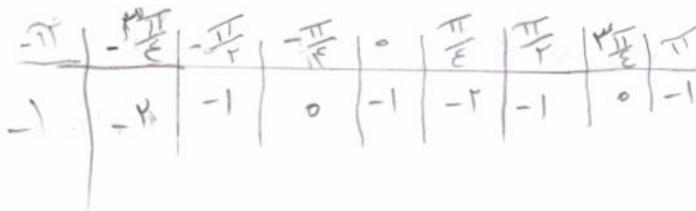
$$0 \leq n < r \iff 0 \leq \frac{1}{r}n < r$$

$$-r \leq n \leq 0 \iff -r \leq \frac{1}{r}n \leq 0$$



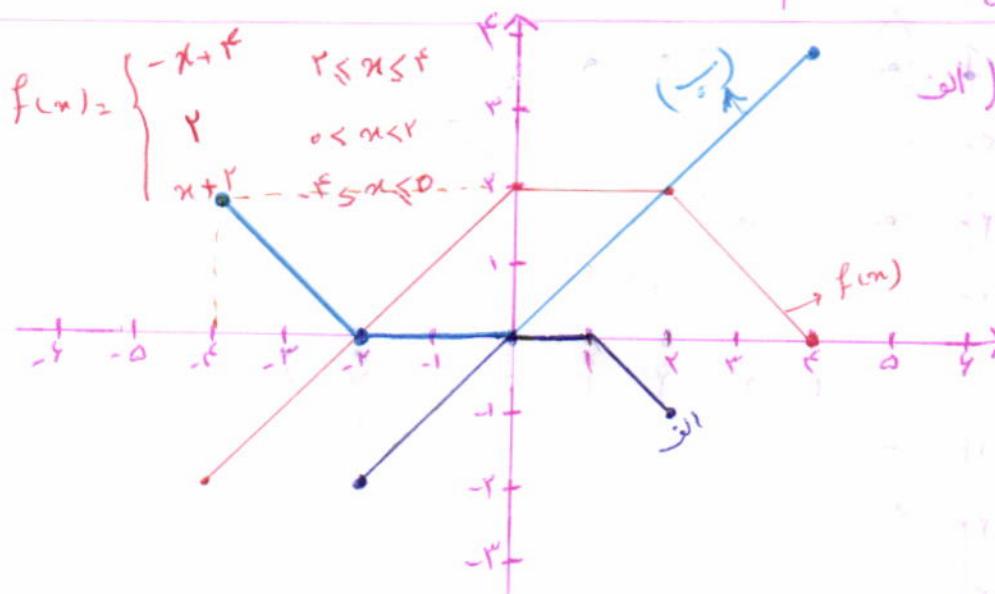
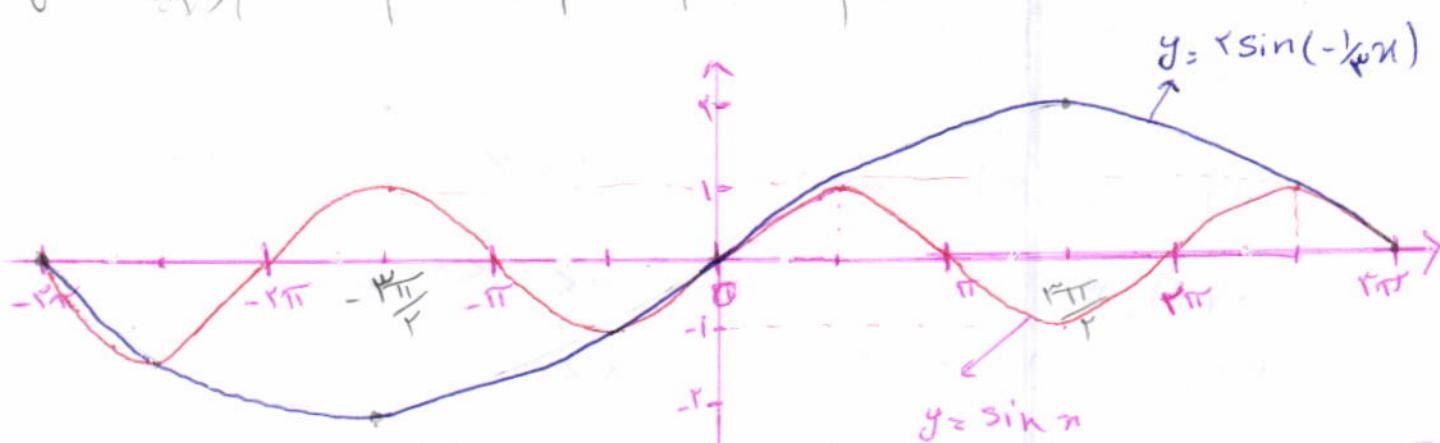
۱۲

$$y = -\sin x \quad n=1 \quad [-\pi, \pi]$$



$$y = r \sin(-\frac{1}{4}n)$$

کرد و در مختصات دو بعدی
استان خوزستان



$$(12) \quad y = \frac{1}{r} f(4n) - 1$$

$$\frac{1}{r} (-r + 4n) - 1$$

$$\begin{cases} -x+4n & 1 \leq x \leq r \in [r, 4n+r] \\ x & -r \leq x < 1 \in (-r, r) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \in (-r, r) \\ x & -r \leq x \leq 4n+r \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} (4n+r) - 1$$

$$\Leftrightarrow y = -f(-x) + r$$

$$y = \begin{cases} -f(-x) + r = -x + r \\ -r + r = 0 \\ -(-x + r) + r = 2x \end{cases}$$

$$-r \leq x \leq -1 \Leftrightarrow r \leq -x \leq 1$$

$$-r < x < 0 \Leftrightarrow 0 < -x < r$$

$$0 \leq x \leq r \Leftrightarrow -r \leq -x \leq 0$$