حل فصل ۷ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

فصل

۷ آمار و احتمال

رامسر، استان مازندران

امروزه نقش روزافزون آمار و احتمال در حل مسائل زندگی بر کسی پوشیده نیست. یکی از کاربردهای مهم آمار و احتمال، پیش‌بینی وضع هواست. با پیشرفت روش‌های علمی، احتمال پیش‌بینی درست آب‌وهوا به‌طور چشمگیری افزایش یافته است.

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال‌های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

۱ــ پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A\text{-}B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شمارهٔ ۸ به‌دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{20}$

اگر بدانید که یک شمارهٔ یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{10}$

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شمارهٔ انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شمارهٔ انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از "احتمال A به شرط B" که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت[1]:

۱ــ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ــ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

بنابراین داریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Longrightarrow P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow$$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$* \quad (1) \quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه: شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$. بنابراین اگر $P(B)=۰$، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل:

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: احتمال رسیدن به خط پایان

$$\Big\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(A)=۰/۸ \\ P(A\cap B)=۰/۷ \end{array}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

۱ــ آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A : پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B : پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $\binom{4}{3}=4$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}=40$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج‌اند. پس :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{44}=\frac{1}{11}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{6}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ و

حل : هدف محاسبهٔ $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{1}{18}$$

و با جای‌گذاری مقادیر داریم :

$$P(A\cup B)=\frac{13}{36}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند، ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع A **با شرط رخ دادن B و بدون این شرط** یکسان است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $\quad (P(B)\neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، پس :

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

> مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ $\quad *$

از این رابطه به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت :

> دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطهٔ * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

> (۱) با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ احتمال، یعنی : $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$
> اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می‌توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

مثال : یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.

حل : فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال : خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل : جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل‌اند، بنابراین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

احتمال پسر بودن هر دو $= P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

مثال : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=۰/۵$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=۰/۸$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، پس $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=۰/۴$

اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A\cup B$ است و داریم :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$

در مثال‌های قبل استقلالِ دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S)=۳۶)$

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

$\{(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(۳,۲)\}$

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با : $\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با : $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با : $\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود (پیشامد A) و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود (پیشامد B)، مستقل از یکدیگرند؟

ب) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود (پیشامد A) و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود (پیشامد B)، مستقل از یکدیگرند؟

پ) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود (پیشامد A) و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود (پیشامد B)، مستقل از یکدیگرند؟

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به‌صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$B=$ {(۲,۱) و (۲,۲) و (۲,۳) و (۲,۴) و (۲,۵) و (۲,۶)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطهٔ $P(A|B)=P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به‌دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ **افزایش می‌دهد**. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

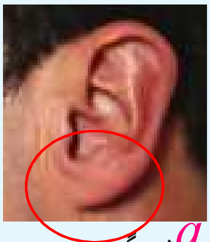
وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را **تغییر نداده است**. بنابراین در این حالت A و B مستقل از یکدیگرند.

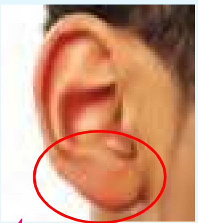
پ) در صورتی که عدد رو شده در تاس اول ۲ باشد، در هیچ حالتی مجموع دو تاس ۱۰ نمی‌شود. بنابراین در این حالت احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود، صفر است. لذا در این حالت وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{1}{12}$ به صفر **کاهش داده است**.

پس در این حالت A و B مستقل نیستند.

خواندنی

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند.
آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند :
اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت؟
در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا می‌پردازیم.


نرمه گوش پیوسته a


نرمه گوش آزاد A

مثال : در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن :

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا Aa می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{1}{2}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است :

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

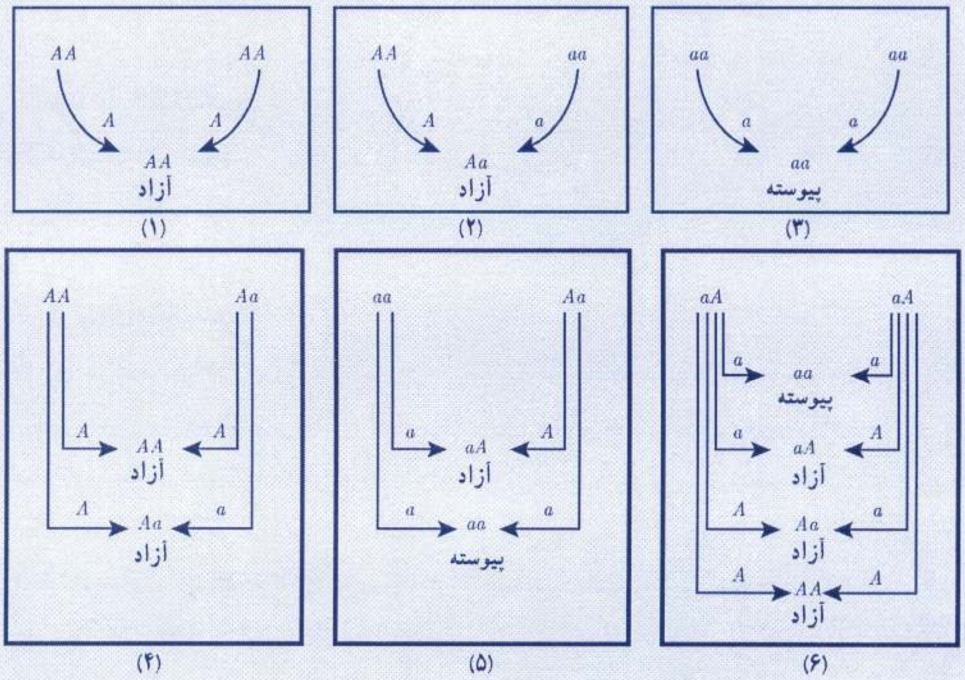
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. به‌طور خلاصه داریم :

عامل‌های شخص	AA	Aa یا aA	aa
نوع نرمهٔ گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

ــ به حالت‌های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می‌گوییم.

در شکل‌های صفحهٔ بعد حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمهٔ گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل: از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$ فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

۱) در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲) یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳) فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

تمرین فصل ۷ – صفحه ۱۵۱

تمرین ۱ : $A=$ظاهر شدن عدد زوج $B=$ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ $C=$ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$A=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ $B=\{۳,۶\} \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ $C=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

* ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن مضرب ۳

$B=\{۳,۶\} \Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۲}$ چون $P(A|B)=P(A)$ پس پیشامد A و B مستقل هستند.

** ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$C=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(A|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ چون $P(A|C)=P(A)$ پس پیشامد A و C مستقل هستند.

*** ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$C=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(B|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ چون $P(B|C)\neq P(B)$ پس پیشامد B و C مستقل نیستند.

تمرین ۲ : $S=\{$(پ،پ،پ)، (پ،ر،پ) ، (ر،پ،پ) ، (پ،پ،ر) ، (پ،ر،ر) ، (ر،پ،ر) ، (ر،ر،پ) ، (ر،ر،ر)$\}$

$A=\{$(ر،پ،پ) ، (ر،ر،پ) ، (ر،پ،ر) ، (ر،ر،ر)$\} \Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ $A=$ظاهر شدن رو در پرتاب سوم سکه

$B=\{$(پ،پ،پ) ، (ر،پ،پ)$\} \Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۲}$ $B=$ظاهر شدن پشت در دو پرتاب اول و دوم

تمرین ۳ : چون پیشامدهای A و B مستقل هستند $\Leftarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

الف) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$

$$P(A')\times P(B)=(۱-P(A))\times P(B)=P(B)-P(A)\times P(B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B-A)=P(B\cap A')=P(A'\cap B)$$

ب) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

$$P(A')\times P(B')=\big(۱-P(A)\big)\times\big(۱-P(B)\big)=۱\underbrace{-P(B)-P(A)+P(A\cap B)}$$

$$=۱-\big(P(B)+P(A)-P(A\cap B)\big)=۱-P(A\cup B)=P(A\cup B)'=P(A'\cap B')$$

تمرین ۴ : $A=$انتخاب در تیم کوهنوردی $B=$انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان

الف) باید $P(A\cap B)$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times ۰/۸=۰/۵۶$$

ب) باید $P(A'\cap B')$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A' و B' مستقل هستند، پس:

$P(A')=۱-P(A) \Rightarrow P(A')=۱-۰/۷=۰/۳$ $P(B')=۱-P(B) \Rightarrow P(B')=۱-۰/۸=۰/۲$

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B') \Rightarrow P(A'\cap B')=۰/۳\times ۰/۲=۰/۰۶$$

پ) باید $P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(B-A)=۰/۸-۰/۵۶=۰/۲۴$$

ت) باید $P(A-B)+P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$P(A-B)+P(B-A)=۰/۱۴+۰/۲۴=۰/۳۸$ $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A-B)=۰/۷-۰/۵۶=۰/۱۴$

ث) باید $P(A\cup B)$ را بدست آوریم پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=۰/۷+۰/۸-۰/۵۶=۰/۹۴$$

تمرین ۵ : $A=$ احتمال قبول شدن رویا در درس ریاضی $B=$ احتمال قبول شدن دوستش در درس ریاضی $P(A\cup B)=0/625$ $P(A)=?$

$$P(A)=2P(B) \quad\Rightarrow\quad P(B)=\frac{1}{2}P(A)$$

چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A)\times\frac{1}{2}P(A)=\frac{1}{2}\big(P(A)\big)^2$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad 0/625=P(A)+\frac{1}{2}P(A)-\frac{1}{2}\big(P(A)\big)^2 \overset{\times 2}{\Rightarrow}$$

$$1/25=2P(A)+P(A)-\big(P(A)\big)^2 \quad\Rightarrow\quad \big(P(A)\big)^2-3P(A)+1/25=0 \overset{t=P(A)}{\Rightarrow}$$

$$t^2-3t+1/25=0 \quad\Rightarrow\quad (t-2/5)(t-0/5)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \cancel{t=2/5} \\ t=0/5 \quad\Rightarrow\quad P(A)=0/5 \end{cases}$$

تمرین ۶ : $A=$ هر دو عدد رو شده زوج $B=$ مجموع اعداد روشده برابر ۸

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \quad\Rightarrow\quad P(A|B)=\frac{3}{5}$$

$$(A\cap B)=\{(2,6),(6,2),(4,4)\}$$

$$A=\{(2,6),(6,2),(5,3),(3,5),(4,4)\}$$

تمرین ۷

$$P(A)=\frac{1}{5} \qquad P(B)=\frac{1}{7} \qquad P(B|A)=\frac{1}{4} \qquad P(A\cup B)=?$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}=\frac{n(A\cap B)}{\frac{1}{5}} \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{20}=\frac{28+20-7}{140}=\frac{41}{140}$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

درس دوم

آمار توصیفی

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای پراکندگی** که در ادامه با آنها آشنا خواهید شد، می‌پردازد. آمارتوصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می شود، دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به‌صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم اندیشهٔ کلی دربارهٔ ویژگی مورد مطالعه به‌دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به‌سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایهٔ هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\overline{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فعالیت

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱. محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

۶۲+۵۵+۵۷+۶۱+۵۵=۲۹۰

۲. سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

$\frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

$*\ \overline{x}_{ax} = \frac{ax_1+ax_2+\dots+ax_N}{N} = \frac{a(x_1+x_2+\dots+x_N)}{N} = a\overline{x}$

$*\ \overline{x+a} = \frac{(x_1+a)+(x_2+a)+\dots+(x_N+a)}{N} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_N+Na}{N}$

$= \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N} + \frac{Na}{N} = \overline{x}+a$

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ...۵۸...

ویژگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟ *

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟ *

کار در کلاس

۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟ $۵۸ \times ۱۰۰۰ = ۵۸۰۰۰$

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

$F = \frac{۹}{۵}(۲۸) + ۳۲ = \frac{۲۵۲}{۵} + ۳۲ = ۵۰٫۴ + ۳۲ = ۸۲٫۴$

میانه

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت قبل، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

محمد برای پاسخ به این سؤال :

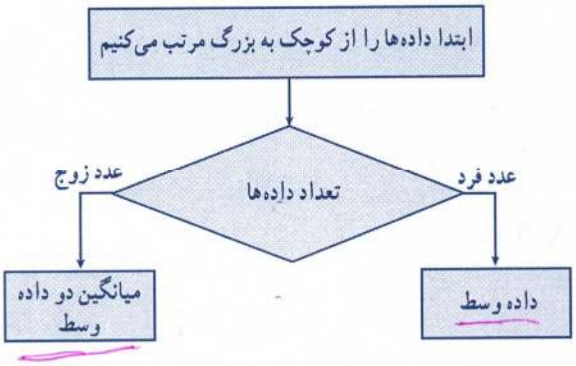
الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد :

۵۵   ۵۵   ۵۷   ۶۱   ۶۲

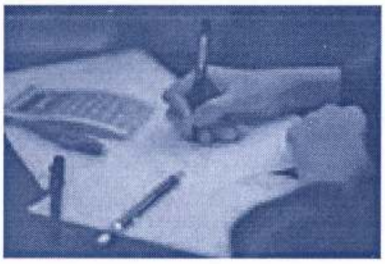
ب) جرم رضا و احمد از سام کمتر است. در حالی‌که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

در مثال فوق، عدد ۵۷ را میانهٔ داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.

روش محاسبهٔ میانه :



تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir



مثال :اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.

ــ میانگین و میانهٔ نمره‌های او را حساب کنید.

۱۹ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۲۰ ۵

الف) محاسبهٔ میانگین

$$\bar{X}=\frac{19+17+18+18+20+5}{6}\simeq 16/17$$

ب) محاسبهٔ میانه

$$5, 17, 18, 18, 19, 20$$

$$Q_2=\frac{18+18}{2}=18$$

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش‌آموز در این درس را بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟ میانه ، چون نمره ۵ باعث شده میانگین خیلی کم شود. درصورتی که این دانش‌آموز اکثراً نمرات خوبی داشته است.

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. درصورتی که میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین درصورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم در غیراین صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

کار در کلاس

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۱۰۰ ۹۱ ۸۲ ۷۵ ۱۰۵ ۹۸ ۹۸ ۱۰۱ ۸۹ ۹۲ ۹۷ ۸۶

ــ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید. ۷۵ ۸۲ ۸۶ ۸۹ ۹۱ ۹۲ ۹۷ ۹۸ ۹۸ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۵

ــ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

$$Q_2=\frac{92+97}{2}=94/5$$

$$\bar{x}=\frac{75+82+86+89+91+92+97+98+98+100+101+105}{12}=\frac{1114}{12}\approx 92/83$$

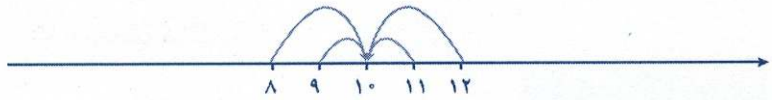
معیارهای پراکندگی

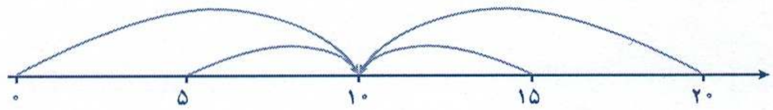
میانه و میانگین اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به‌عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

فعالیت

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است :

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰





الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ $\quad Q_2 = 10$

۰ ۵ ۱۰ ۱۵ ۲۰ $\quad Q'_2 = 10$

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

$\bar{x}_A = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10 \qquad \bar{x}_B = \frac{0+5+10+15+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت می‌بینید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها نیز توجه شود.

دامنهٔ تغییرات

> دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت بالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B به‌صورت زیر عمل کنید :

	کلاس B	کلاس A
کوچک‌ترین داده	۰	۸
بزرگ‌ترین داده	۲۰	۱۲
دامنه تغییرات	۲۰=۰ − ۲۰	۴= ۸− ۱۲

در فعالیت بالا دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.

کار در کلاس

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱۵ ۸ ۹ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ $R = 15 - 1 = 14$

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید. $R = 15 - 1 = 14$

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ هردو با هم برابرند. چون دامنه تغییرات فقط به بزرگترین داده و کوچکترین داده بستگی دارد.

همان طور که می‌بینید، دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس

می‌خواهیم شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها پیدا کنیم. از آنجا که میانگین، معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشد و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

فعالیت

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

کلاس A	
x_i	$(x_i - \overline{X})$
۸	$8 - 10 = -2$
۹	$9 - 10 = -1$
۱۰	$10 - 10 = 0$
۱۱	$11 - 10 = 1$
۱۲	$12 - 10 = 2$

کلاس B	
y_i	$(y_i - \overline{Y})$
۰	$0 - 10 = -10$
۵	$5 - 10 = -5$
۱۰	$10 - 10 = 0$
۱۵	$15 - 10 = 5$
۲۰	$20 - 10 = 10$

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

اختلاف داده‌ها از میانگین کلاس A $= (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$

مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین کلاس B $= (-10) + (-5) + 0 + 5 + 10 = 0$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده است.

همواره برای هرمجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدرمطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده کرد. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس A		
x_i	$(x_i-\overline{X})$	$(x_i-\overline{X})^2$
۸	۲-	۴
۹	۱-	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

کلاس B		
y_i	$(y_i-\overline{Y})$	$(y_i-\overline{Y})^2$
۰	۱۰-	۱۰۰
۵	۵-	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(8-10)^2+\dots+(12-10)^2=10$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(0-10)^2+\dots+(20-10)^2=250$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(8-10)^2+\dots+(12-10)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$
میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(0-10)^2+\dots+(20-10)^2}{5}=\frac{250}{5}=50$

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می نامند و از نماد σ^2 برای نمایش آن استفاده می‌شود : $\sigma^2=\frac{(x_1-\overline{X})^2+\dots+(x_N-\overline{X})^2}{N}$

تذکر : واحد واریانس برابر با توان دوم واحد دادهٔ مورد نظر است.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

$\bar{x} = \frac{15+8+8+12+14+4+1}{7} = \frac{62}{7} \approx 8.85 \to 9$

$\sigma^2 = \frac{(6)^2+(1)^2+(1)^2+(3)^2+(5)^2+(5)^2+(8)^2}{7} = \frac{161}{7} = 23$

همان‌طور که در فعالیت قبل دیده می‌شود، واریانس بزرگ (کلاس B) نشان دهندهٔ دور بودن داده‌ها از میانگین آنها و واریانس کوچک (کلاس A) نشان دهندهٔ نزدیکی داده‌ها به میانگین آنهاست. چنانچه همه داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس آنها صفر خواهد بود. بنابراین واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

$\bar{x} = \frac{15+8+8+12+14+4+1+5+11}{9} = \frac{78}{9} \approx 8.67 \to 9$

کار در کلاس

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کاردرکلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

$\sigma^2 = \frac{(6)^2+(1)^2+(1)^2+(3)^2+(5)^2+(5)^2+(8)^2+(4)^2+(2)^2}{9} = \frac{181}{9} \approx 20.11$

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
۲۳	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱
۲۰/۱۱	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ ۵ ۱۱

همان‌طور که در این «کاردرکلاس»، دیده می‌شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

پس اختلاف از میانگین تغییری نمی‌کند

ویژگی‌های واریانس

* اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟ چون میانگین هم به همان مقدار اضافه می‌شود
* اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

چون میانگین هم در همان عدد ضرب می‌شود پس اختلاف از میانگین‌ها هم در همان عدد ضرب می‌شود و بعد که اختلاف از میانگین‌ها به توان ۲ می‌رسد این عدد هم به توان ۲ می‌رسد.

کار در کلاس

۱) در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

$\sigma^2 = \frac{(62-58)^2+(55-58)^2+(57-58)^2+(61-58)^2+(55-58)^2}{5} = \frac{16+9+1+9+9}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$

۲) هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی $F = \frac{9}{5}C + 32$) جمع با ۳۲ تأثیری ندارد. اما باید در توان دو $\frac{9}{5}$ ضرب شود.

$\sigma^2 = 6 \times \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{486}{25} = 19.44$

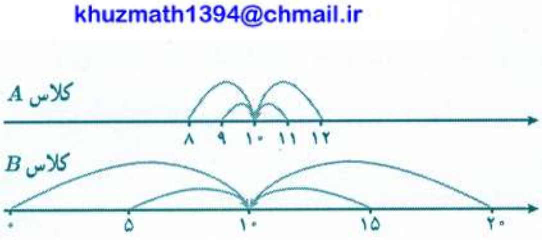
تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

انحراف معیار

معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی فعالیت قبل در جدول زیر آمده است.

اشتباه تایپی

جذر واریانس	واریانس	دامنه تغییرات	میانه	میانگین	
~~۱/۶~~ $\sqrt{2} \approx 1.41$	~~۲/۵~~ ۲	۴	۱۰	۱۰	کلاس A
~~۷/۹~~ $\sqrt{50} \approx 7.07$	~~۶۲/۵~~ ۵۰	۲۰	۱۰	۱۰	کلاس B



همان‌طور که در جدول و نمودار بالا دیده می‌شود، واریانس پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حدانتظار نشان می‌دهد؛ زیرا در محاسبهٔ واریانس از میانگین **مجذور** اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود. درحالی‌که جذر واریانس شاخص بهتری برای پراکندگی حول میانگین داده‌ها است.

$* \ \sigma^2_{a+x} = \frac{((a+x_1)-(a+\bar{x}))^2 + \cdots + ((a+x_N)-(a+\bar{x}))^2}{N} = \frac{(\cancel{a}+x_1-\cancel{a}-\bar{x})^2+\cdots+(\cancel{a}+x_N-\cancel{a}-\bar{x})^2}{N}$

$= \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N} = \sigma^2_x$

$* \ \sigma^2_{ax} = \frac{(ax_1-a\bar{x})^2+\cdots+(ax_N-a\bar{x})^2}{N} = \frac{(a(x_1-\bar{x}))^2+\cdots+(a(x_N-\bar{x}))^2}{N}$

$= \frac{a^2(x_1-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_N-\bar{x})^2}{N} = \frac{a^2[(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2]}{N} = a^2\sigma^2_x$

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن‌را با نماد σ نمایش می‌دهند :

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+\cdots+(x_N-\overline{X})^2}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟ انحراف معیار ، چون واحد آن با واحد داده‌ها برابر است .

مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که با cv نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv=\frac{\sigma}{\overline{X}}$) است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا با واحدهایی که نمی‌شناسیم بیان شده باشند می‌توان برای مقایسهٔ پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.

مثال : ضریب تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A و کلاس B در فعالیت قبل محاسبه شد.

اشتباه تایپی

	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کلاس A	۱۰	~~۱/۶~~ ۱٫٤۱	$\frac{\cancel{1/6}\ 1{,}41}{10}=$ ~~۰/۱۶~~ یا ~~۱۶٪~~ ۰/۱٤ ۱٤٪
کلاس B		۷٫۵۷	$\frac{\cancel{7/9}\ 7{,}57}{10}=$ ~~۰/۷۹~~ یا ~~۷۹٪~~ ۰/۷۵ ۷۵٪

معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کلاس A، که ضریب تغییرات کمتری دارد، تدریس کند.

کار در کلاس

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد و کیش، به ترتیب به فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
مشهد (فارنهایت)	۵۰	۵۳	۴۹	۴۱	۳۹	۳۷	۳۷
کیش (سانتی‌گراد)	۲۷	۲۶	۲۴	۲۳	۲۲	۲۲	۲۱

$\overline{x}_{\text{مشهد}}=\frac{50+53+49+41+39+37+37}{7}=\frac{306}{7}\approx 43{,}71 \rightarrow 44$

$\sigma^2_{\text{مشهد}}=\frac{(6)^2+(9)^2+(5)^2+(3)^2+(5)^2+(7)^2+(7)^2}{7}=\frac{274}{7}\approx 39{,}14 \qquad \sigma=\sqrt{39{,}14}\approx 6{,}25$

$\overline{x}_{\text{کیش}}=\frac{27+26+24+23+22+22+21}{7}=\frac{165}{7}\approx 23{,}57 \longrightarrow 24$

$\sigma^2_{\text{کیش}}=\frac{(3)^2+(2)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2+(2)^2+(3)^2}{7}=\frac{31}{7}\approx 4{,}43 \qquad \sigma=\sqrt{4{,}43}\approx 2{,}10$

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

۲۲	۲۴	$\boxed{۴۸}$	۵۱	۶۰	$\boxed{۷۰}$	۷۵	۸۰	$\boxed{۸۷}$	۹۳	۹۵
		چارک اول			میانه			چارک سوم		

می‌بینید که ۲۵ درصد داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰درصد داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵درصد داده‌ها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.

محاسبهٔ چارک‌ها :

ابتدا میانه داده‌ها را به‌دست آورید

↓

برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

↓

برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

مثال : تعداد تصادف‌های اتومبیل‌ها در ۱۵ روز اول تابستان در شهری به‌صورت زیر گزارش شده است.

۱۹ ۳۱ ۲۵ ۱۸ ۳۲ ۴۱ ۴۳ ۳۴ ۱۶ ۲۷ ۱۴ ۲۳ ۱۵ ۱۰ ۱۲

چارک‌ها را مشخص کنید :

۱۰	۱۲	۱۴	$\boxed{۱۵}$	۱۶	۱۸	۱۹	$\boxed{۲۳}$	۲۵	۲۷	۳۱	$\boxed{۳۲}$	۳۴	۴۱	۴۳
			چارک اول				میانه				چارک سوم			

توجه به این نکته نیز ضروری است که با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصلهٔ بین دو دادهٔ متوالی قرار گیرند.

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۱۵ - ۱۵ - ۲۰ - ۲۰ - ۲۵ - ۳۰ - ۳۰ - ۳۰ - ۴۵ - ۴۵ - ۴۵ - ۴۵ - ۶۰ - ۶۰ - ۶۰ - ۶۰ - ۶۰ - ۶۰ Q_1 Q_2
۷۵ - ۷۵ - ۸۰ - ۹۰ - ۹۰ - ۹۰ - ۹۰ - ۱۰۰ - ۱۰۰ - ۱۱۵ - ۱۲۰ - ۱۲۰ - ۱۲۰ - ۱۲۰ - ۱۸۰ - ۱۸۰ - ۲۰۰ - ۲۰۰ Q_3

کار در کلاس

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.
$Q_2 = 60 \quad Q_1 = 45 \quad Q_3 = 100$

تمرین

۱) درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. با فرض مثبت بودن c

ـ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد. نادرست

ـ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود. نادرست

ـ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود. درست

ـ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند. درست

۲) کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

۳) جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

خواندنی

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم ،... و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

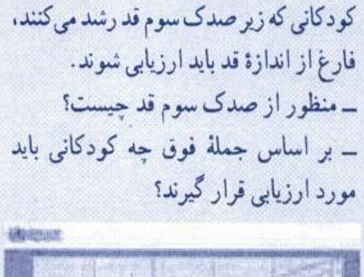
اگر دولت بخواهد یارانهٔ افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانهٔ افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به‌صرفه است؟

صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم ،...و صدک نود و نهم) مقادیر نود و نه داده‌اند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست‌وپنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازهٔ قد باید ارزیابی شوند.

ـ منظور از صدک سوم قد چیست؟

ـ بر اساس جملهٔ فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟



تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ــ۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود.
(راهنمایی : $1m = 3/281\,ft$ ، ft : فوت ، m : متر)

	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۲۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

خواندنی

شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارها در یک جامعه به مصرف می‌رسد. این شاخص به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به‌شمار می‌رود. برای محاسبهٔ شاخص تورم، سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبهٔ شاخص تورم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$I_t = \frac{P_t^i Q_t^i + \cdots + P_t^{385} Q_t^{385}}{P_0^i Q_0^i + \cdots + P_0^{385} Q_0^{385}} \times 100$$

سال	شاخص تورم	نرخ تورم
۱۳۸۴	۳۹/۸۰	۱۰/۴
۱۳۸۵	۴۴/۵۳	۱۱/۹
۱۳۸۶	۵۲/۷۴	۱۸/۴
۱۳۸۷	۶۶/۱۲	۲۵/۴
۱۳۸۸	۷۳/۲۳	۱۰/۸
۱۳۸۹	۸۲/۳۱	۱۲/۴
۱۳۹۰	۱۰۰/۰۰	۲۱/۵
۱۳۹۱	۱۳۰/۵۴	۳۰/۵
۱۳۹۲	۱۷۵/۸۸	۳۴/۷
۱۳۹۳	۲۰۳/۲۴	۱۵/۶
۱۳۹۴	۲۲۷/۴۶	۱۱/۹

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t
P_t^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان t
P_0^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان پایه
Q_t^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان t
Q_0^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان پایه

برای محاسبهٔ نرخ تورم (Inf_t) از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$Inf_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

I_t شاخص تورم در سال موردنظر و I_{t-1} شاخص تورم در سال قبل از آن است.

تمرین ۲ : $\bar{x}_B = ۱۰۰۰۰ , \sigma_B = ۱۰۰۰ \quad CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۱$ $\quad \bar{x}_A = ۱۱۰۰۰ , \sigma_A = ۲۰۰۰ \quad CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{۲۰۰۰}{۱۱۰۰۰} \approx ۰/۱۸$

لاستیک نوع B بهتر است چون ضریب تغییراتش کمتر است.

تمرین ۳ : الف)

$$\bar{x}_{maryam} = \frac{۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵ \qquad \bar{x}_{mina} = \frac{۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

ب)

$$\sigma^۲_{mina} = \frac{(۲۳-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۲۶-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\sigma^۲_{maryam} = \frac{(۱۵-۲۵)^۲+(۲۰-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۳۰-۲۵)^۲+(۳۵-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۱۰۰+۲۵+۰+۲۵+۱۰۰}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

پ) برای مینا چون پراکندگی پول توجیبی آن کمتر است.

تمرین ۴ :

$Q_۲ = ۱۵/۶ \qquad ۱۰/۴ , ۱۰/۸ , ۱۱/۹ , ۱۱/۹ , ۱۲/۴ , \underset{Q_۲}{۱۵/۶} , ۱۸/۴ , ۲۱/۵ , ۲۵/۴ , ۳۰/۵ , ۳۴/۷$

$$\bar{x} = \frac{۱۰/۴+۱۰/۸+۱۱/۹+۱۱/۹+۱۲/۴+۱۵/۶+۱۸/۴+۲۱/۵+۲۵/۴+۳۰/۵+۳۴/۷}{۱۱} = \frac{۲۰۳/۵}{۱۱} = ۱۸/۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۰/۴-۱۸/۵)^۲+(۱۰/۸-۱۸/۵)^۲+۲(۱۱/۹-۱۸/۵)^۲+(۱۲/۴-۱۸/۵)^۲+(۱۵/۶-۱۸/۵)^۲}{۱۱}$$

$$\underline{+(۱۸/۴-۱۸/۵)^۲+(۲۱/۵-۱۸/۵)^۲+(۲۵/۴-۱۸/۵)^۲+(۳۰/۵-۱۸/۵)^۲+(۳۴/۷-۱۸/۵)^۲}$$

$$= \frac{۶۵/۶۱+۴۳/۵۶+۰/۰۱+۴۷/۶۱+۵۹/۲۹+۳۷/۲۱+۹+۱۴۴+۲۶۲/۴۴+۸/۴۱}{۱۱} = \frac{۶۷۷/۱۴}{۱۱} \approx ۶۱/۵۶$$

$$\sigma = \sqrt{۶۱/۵۶} \approx ۷/۸۵$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۵ :

	کهگیلویه و بویر احمد			مرکزی				
	دنا	دهدشت	یاسوج	شازند	خمین	محلات	اراک	شهر
	$۷۲۱۸/۲۰\,(ft)$	$۳۲۴۸/۱۹\,(ft)$	$۶۱۳۵/۴۷\,(ft)$	$۱۹۲۰\,(m)$	$۱۸۳۰\,(m)$	$۱۷۷۵\,(m)$	$۱۷۰۸\,(m)$	فاصله از سطح دریا
	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ $۲۲۰۰\,(m)$	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ $۹۹۰\,(m)$	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ $۱۸۷۰\,(m)$	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ $۶۲۹۹/۵۲\,(ft)$	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ $۶۰۰۴/۲۳\,(ft)$	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ $۵۸۲۳/۷۷\,(ft)$	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ $۵۶۰۳/۹۴۸\,(ft)$	

الف)

$$\bar{x} = \frac{۱۷۰۸+۱۷۷۵+۱۸۳۰+۱۹۲۰}{۴} = \frac{۷۲۳۳}{۴} = ۱۸۰۸/۲۵ \rightarrow ۱۸۰۸$$

ب)

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۷۰۸-۱۸۰۸)^۲+(۱۷۷۵-۱۸۰۸)^۲+(۱۸۳۰-۱۸۰۸)^۲+(۱۹۲۰-۱۸۰۸)^۲}{۴} = \frac{(-۱۰۰)^۲+(-۳۳)^۲+(۲۲)^۲+(۱۱۲)^۲}{۴}$$

$$= \frac{۱۰۰۰۰+۱۰۸۹+۴۸۴+۱۲۵۴۴}{۴} = \frac{۲۴۱۱۷}{۴} \approx ۶۰۲۹/۲۵ \qquad \sigma = \sqrt{۶۰۲۹/۲۵} \approx ۷۷/۶۴$$

پ) شهرهای استان مرکزی ارتفاع بیشتری از سطح دریا دارند.
$$\bar{x} = \frac{۱۸۷۰+۹۹۰+۲۲۰۰}{۳} = \frac{۵۰۶۰}{۳} \approx ۱۶۸۶/۷$$